

# Control por Modos Deslizantes

Tomo 1. Modos deslizantes de primer  
orden: Fundamentos y aplicaciones <sup>1</sup>

RICARDO JULIÁN MANTZ<sup>2</sup>

December 26, 2020

<sup>1</sup>Edición Beta en base del material del Curso de Posgrado: Control por Modos Deslizantes.

<sup>2</sup>Profesor de La Facultad de Ingeniería de la UNLP. Investigador Principal de Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.



A los que me han sufrido



# Contents

<b>1</b>	<b>SISTEMAS DE ESTRUCTURA VARIABLE</b>	<b>3</b>
1.1	Preliminares . . . . .	3
1.2	Algunos comportamientos distintivos . . . . .	6
1.3	Ejemplos . . . . .	9
1.3.1	Ejemplo 1 . . . . .	9
1.3.2	Ejemplo 2 . . . . .	14
1.3.3	Ejemplo 3 . . . . .	21
1.3.4	Ejemplo 4 . . . . .	23
1.4	Sistemas de control por Modos Deslizantes . . . . .	25
<b>2</b>	<b>CONTROL DE SISTEMAS LINEALES POR MD</b>	<b>27</b>
2.1	Conceptos básicos . . . . .	27
2.2	Modo Alcance . . . . .	29
2.3	Respuesta temporal . . . . .	33
2.4	Método del Control Equivalente . . . . .	38
2.4.1	Cálculo del control equivalente en un sistema lineal . . . . .	38
2.4.2	Condiciones para MD . . . . .	39
2.5	Dinámica de MD . . . . .	43
2.5.1	Ecuaciones de estado del sistema a lazo cerrado . . . . .	43
2.5.2	Solución de las ecuaciones de estado en MD . . . . .	46
2.6	Diseño del control por MD . . . . .	47
2.6.1	Asignación de autovalores . . . . .	47
2.6.2	Eliminación del error de estado estacionario . . . . .	55
2.7	MD con observadores de estado . . . . .	61
<b>3</b>	<b>DOMINIO DEL MD</b>	<b>67</b>
3.1	Introducción . . . . .	67
3.2	Rango de operación en MD . . . . .	71
3.3	Rango restringido . . . . .	76
<b>4</b>	<b>MODO DESLIZANTE REAL</b>	<b>81</b>
4.1	Introducción . . . . .	81
4.2	Frecuencia de conmutación finita . . . . .	81

4.3	Histéresis . . . . .	82
4.4	Agregado de una señal auxiliar (PWM) . . . . .	84
4.4.1	Cálculo de $\Delta s$ . . . . .	85
4.4.2	Cálculo $S_m$ . . . . .	86
<b>5</b>	<b>APLICACIONES EN SISTEMAS SISO LINEALES</b>	<b>89</b>
5.1	Fuente Buck . . . . .	89
5.2	Diseño de observadores de estado con MD . . . . .	98
5.3	Implementación de un control PID por MD . . . . .	101
5.4	Modulador por MD . . . . .	104
5.5	Control de un sistema térmico . . . . .	105
<b>6</b>	<b>MD PARA SISTEMAS CON RESTRICCIONES</b>	<b>109</b>
6.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	109
6.2	Acondicionamiento de la referencia via MD . . . . .	110
6.3	APLICACIONES . . . . .	114
6.3.1	Acondicionamiento de la referencia via MD como algoritmo anti-windup . . . . .	114
6.3.2	Acondicionamiento de la referencia vía MD para garantizar operación segura . . . . .	117
6.3.3	Acondicionamiento de la referencia aplicado al problema de acoplamiento de variables en sistemas MIMO . . . . .	118
6.3.4	Acondicionamiento de la referencia aplicado al problema de pérdida de direccionalidad en el control . . . . .	120
<b>7</b>	<b>MD EN SISTEMAS MIMO</b>	<b>125</b>
7.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	125
7.2	MODO ALCANCE EN SISTEMAS MIMO . . . . .	126
7.2.1	Condición de existencia para un régimen deslizante sobre la intersección de las superficies . . . . .	137
7.3	Dinámica de MD en sistemas MIMO . . . . .	140
7.4	Orden del sistema MIMO operando en MD . . . . .	142
7.5	Asignación de autovalores . . . . .	144
7.6	Ejemplo . . . . .	145
<b>8</b>	<b>INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MD</b>	<b>151</b>
8.1	Preliminares . . . . .	151
8.1.1	Derivada direccional . . . . .	151
8.1.2	Propiedades de la derivada direccional . . . . .	153
8.2	Descripción del MD via derivadas de Lie . . . . .	154
8.2.1	Condición de transversalidad . . . . .	155
8.2.2	Control equivalente . . . . .	156
8.3	Dinámica en MD . . . . .	157
8.4	Robustez del control por MD . . . . .	160

8.4.1	Control equivalente del sistema perturbado . . . . .	160
8.4.2	Respuesta de lazo cerrado del sistema perturbado . . .	161
8.5	Robustez a incertidumbre en los parámetros . . . . .	162
<b>9</b>	<b>CONTROL POR MD DE SISTEMAS NL</b>	<b>167</b>
9.1	Modelos de sistemas NL . . . . .	167
9.1.1	Grado relativo . . . . .	167
9.1.2	Transformación de modelos . . . . .	169
9.1.3	Modelo Normal y Modelo Regular . . . . .	170
9.2	Control por MD con modelo Normal con $r=n$ . . . . .	171
9.2.1	Modelo Normal para sistemas con grado relativo $r = n$	171
9.2.2	Diseño del controlador por MD para el caso de $r = n$	175
9.3	Control por MD con modelo Normal con $r < n$ . . . . .	180
9.3.1	Modelo Normal de sistemas con salida de grado rela- tivo $r < n$ . . . . .	180
9.3.2	Diseño del controlador por MD para el caso de $r < n$	181
9.4	Diseño a partir del modelo regular . . . . .	186
<b>10</b>	<b>CONTROL DE SISTEMAS NO LINEALES. APLICACIONES.</b>	<b>191</b>
10.1	Convertidor Boost . . . . .	191
10.1.1	Caso A. Control de tensión . . . . .	193
10.1.2	Caso B. Control de corriente . . . . .	201
10.1.3	Caso C. Control de energía interna del convertidor Boost	206
10.2	Control de un sistema fotovoltaico . . . . .	208
10.2.1	Control de corriente $i_L$ . . . . .	210
10.2.2	Control de tensión $v_C$ . . . . .	214
<b>11</b>	<b>CONTINÚA</b>	<b>219</b>





# List of Figures

1.1	a) Intento de estacionamiento en una maniobra, b) estacionamiento en tres maniobras . . . . .	4
1.2	Fuente conmutada Boost . . . . .	5
1.3	Eficiencia de una caja automática de velocidades . . . . .	5
1.4	Control de un sistema con saturación de entrada . . . . .	6
1.5	Combinación de ganancias para mejorar la respuesta transitoria . . . . .	7
1.6	Control Posicast . . . . .	7
1.7	Doble integrador realimentado en forma lineal . . . . .	10
1.8	Lugar de raíces, trayectorias en el plano de fase y respuesta temporal del doble integrador realimentado linealmente . . . . .	11
1.9	Trayectorias en el plano de fase de sistemas altamente subamortiguados (estables e inestables) . . . . .	12
1.10	Sistema conmutado con dos valores de ganancias . . . . .	13
1.11	Sistema conmutado estable a partir de la conmutación de dos sistemas inestables . . . . .	14
1.12	Sistema conmutado inestable a partir de la conmutación de dos sistemas estables . . . . .	15
1.13	Servomotor de continua y modelo idealizado . . . . .	16
1.14	Control de máximo esfuerzo del servomotor de continua . . . . .	16
1.15	Trayectorias para a) $u = M$ , para b) $u = -M$ . c) Apertura de las trayectorias en función de $M$ . . . . .	17
1.16	a) Trayectoria del sistema de la figura 1.14 en el plano de fase, b) evolución temporal del estado $x_1$ , c) evolución temporal del estado $x_2$ . . . . .	18
1.17	Cambio de recta de conmutación y diagrama para su implementación . . . . .	19
1.18	a) Conmutación con respuesta temporal óptima, b) conmutación tardía y c) conmutación anticipada . . . . .	20
1.19	a) Péndulo, b) respuesta temporal con control de estructura variable . . . . .	22
1.20	Rebotes de una pelota que se deja caer . . . . .	23

2.1	a) Trayectorias en el plano de estados para $u^+$ , $u^-$ y para el caso controlado. b) Función de conmutación $s(x)$ y trayectorias durante el MA y el MD . . . . .	30
2.2	Interpretación geométrica de las condiciones del MA (ecuaciones (2.12) y (2.13)) . . . . .	32
2.3	Alcance de la superficie y MD con dinámica inestable . . . . .	33
2.4	Evolución de las variables de estado mediante la solución Caratheodory . . . . .	34
2.5	Regularización . . . . .	35
2.6	Interpretación de Filippov . . . . .	36
2.7	Interpretación gráfica del control equivalente . . . . .	40
2.8	Superficies de control . . . . .	41
2.9	Rangos de operación en 3 superficies de control considerando $U = 1$ . . . . .	44
2.10	Esquema de control por MD . . . . .	50
2.11	Cálculo de las ganancias de $s(x) = 0$ a partir de un modelo genérico (alternativa 2) . . . . .	52
2.12	a) Variable controlada y función de conmutación. b) Trayectorias en el plano de fase vistas desde dos ángulos distintos . . . . .	54
2.13	Expansión de estados para eliminar errores de estado estacionario constantes . . . . .	55
2.14	Control por MD con rechazo de perturbaciones constantes . . . . .	57
2.15	Respuesta con error de estado estacionario a la perturbación $v$ constante . . . . .	58
2.16	Respuesta del sistema expandido y función de conmutación para el caso con perturbación . . . . .	60
2.17	a) y b) trayectorias en el espacio $(x_1, x_2, x_3)$ del sistema expandido de 4 estados desde dos ángulos distintos de observación para el tiempo previo a la perturbación. c) Trayectoria del sistema expandido considerando la perturbación . . . . .	61
2.18	Control por MD con observador de estados . . . . .	62
3.1	Rango de operación en MD y variables $x_1(t)$ , $x_2(t)$ y $u(t)$ ( $u(t) = u_{eq}(t)$ a partir de $t_1$ ) . . . . .	69
3.2	Evolución de $u_{eq}(t)$ : a) dentro de los límites disponibles y b) excediendo uno de los límites . . . . .	71
3.3	Trayectorias en el plano de estado para distintos valores de $u_{lim}$ . a) MD ininterrumpido. b) y c) MD interrumpido . . . . .	71
3.4	a) Límites del rango de $s(x) = 0$ para operación en MD en el espacio de estados $(\omega, i, \theta)$ . b) Proyección de los límites en el espacio $(\omega, i)$ . . . . .	75
3.5	Gráfico comparativo que muestra la influencia de la asignación de los autovalores sobre el rango de operación en MD. $\rho=20, 40$ y $60$ . . . . .	76

3.6	Rango restringido de operación en MD . . . . .	77
3.7	Determinación del rango restringido de la operación en MD . . . . .	78
3.8	Espacio de estados, superficie de control y límites de operación en MD . . . . .	79
4.1	Limitación de la frecuencia de conmutación empleando un dispositivo con histéresis . . . . .	82
4.2	Limitación de la frecuencia de conmutación con el agregado de una señal externa . . . . .	85
4.3	Detalle de la evolución temporal de $s(x)$ para el cálculo de $\Delta s$ y $S_m$ . . . . .	87
4.4	Evolución temporal de $s(x)$ con establecimiento de un MD sobre $\delta(t)$ . . . . .	88
5.1	a) Fuente Buck, b) esquema de fuente Buck reemplazando los dispositivos electrónicos por una llave $LL$ . . . . .	90
5.2	Evolución de las variables en la fuente Buck con control de corriente . . . . .	94
5.3	Trayectorias en el plano de fase de la fuente Buck con control de corriente . . . . .	95
5.4	Esquema de control con superficie que incluye los dos estados . . . . .	96
5.5	a) Diagrama en bloques del control con una superficie que incluye expansión con estado integral. b) Vinculación con control PI convencional . . . . .	97
5.6	Observador de estados con corrección por MD . . . . .	98
5.7	a) Observador de estados por MD. b) Caso particular para sistema con 2 estados canónicos controlables . . . . .	101
5.8	Lazo de control: proceso, compensación PID y actuador de potencia A . . . . .	102
5.9	a) PID con modulación incorporada b) 2DOF/PID con modulación incorporada . . . . .	103
5.10	Modulador delta . . . . .	104
5.11	Desempeño del modulador para distintos valores de $K$ . . . . .	105
5.12	Control on-off de temperatura . . . . .	106
5.13	Control predictivo+MD de un horno . . . . .	107
5.14	Esquema para comparar el control on-off de un horno con el control predictivo+MD . . . . .	107
5.15	Temperatura de un horno con controles on-off y predictivo+MD . . . . .	107
5.16	Predicción y temperatura de un horno con controles on-off y predictivo+MD . . . . .	108
6.1	Acondicionamiento de la referencia del lazo principal por modo deslizante . . . . .	110

6.2	a) Efecto de la saturación sobre la variable controlada $y_1$ , b) señales de control $u_1$ y $u_{P_1}$ en correspondencia con la figura 6.2a, c) $y_1$ considerando saturación en el actuador, con y sin la compensación propuesta, d) señales $u_1$ y $u_{P_1}$ en correspondencia con figura 6.2c . . . . .	116
6.3	Trayectorias en el plano $[u_1, x_{q_1}]$ (estado integral de $PI_{11}$ ) sin y con la corrección propuesta . . . . .	117
6.4	a) Variable $x_2$ con y sin la corrección propuesta. b) Variable $x_1$ en correspondencia con a). c) Trayectorias en el plano $(x_2, \dot{x}_2)$ . . . . .	118
6.5	Variables controladas ante un cambio en el setpoint 1 . . . . .	120
6.6	Variables controladas en ausencia de restricciones en los actuadores. . . . .	121
6.7	a) Variables controladas en presencia de restricciones en los actuadores. b) Salidas de los controladores y entradas en el proceso . . . . .	122
6.8	Corrección del cambio de dirección del control por un régimen deslizante. a) Variables controladas. b) Entradas a la planta. . . . .	122
6.9	a) Variables controladas con filtrado de referencia, sin corrección por régimen deslizante. b) Entradas a la planta. . . . .	123
7.1	Control por MD de sistema MIMO . . . . .	126
7.2	MA a partir de alcanzar superficies en forma individual . . . . .	130
7.3	Control MIMO del ejemplo 1 . . . . .	132
7.4	Modo Alcance directo sobre la intersección de las superficies . . . . .	133
7.5	Función módulo y su derivada . . . . .	136
7.6	Comportamiento inestable que impide alcanzar la intersección de las superficies . . . . .	138
7.7	Esquema de control por MD MIMO . . . . .	141
7.8	Compensación de reactivo: a) para carga no lineal, b) para carga lineal . . . . .	146
7.9	Compensación con FA paralelo de los armónicos generados por un rectificador trifásico . . . . .	146
7.10	a) Tensiones de red, b) corrientes de carga, c) corrientes de compensación del FA y d) corrientes de red . . . . .	149
8.1	Interpretación de la derivada de Lie . . . . .	152
8.2	Interpretación geométrica de la condición de transversalidad . . . . .	155
8.3	Interpretación geométrica del operador $F(x)$ . . . . .	158
8.4	Interpretación geométrica del MD . . . . .	159
8.5	Descomposición de la perturbación . . . . .	161
8.6	Interpretación geométrica de la robustez del MD a perturbaciones . . . . .	163

8.7	Interpretación geométrica de la robustez a cambios en los parámetros. a) Cambios en $g$ . b) Cambios en $f$ . . . . .	165
9.1	Modelo normal de un sistema de grado relativo $r = n$ . . . . .	172
9.2	Modelo normal del sistema (9.26) . . . . .	174
9.3	Diagrama de control por MD de un sistema de grado relativo $r = n$ a partir de las variables de estado del modelo normal . . . . .	176
9.4	Salida del sistema NL controlado por MD y función de conmutación . . . . .	179
9.5	Modelo normal para sistema de grado relativo $r < n$ . . . . .	181
9.6	Vehículo aéreo de observación . . . . .	184
9.7	Estabilidad de los puntos de equilibrio de la dinámica escondida	190
9.8	Superficie de control y trayectorias . . . . .	190
10.1	Convertidor BOOST . . . . .	192
10.2	Zona del espacio de estados donde el convertidor BOOST puede operar en MD . . . . .	196
10.3	Lugar geométrico de los puntos de equilibrio para distintas referencias $V_r$ . . . . .	197
10.4	Comportamiento que podría desprenderse de un análisis rápido y EQUIVOCADO del convertidor Boost . . . . .	198
10.5	Gráfico de $di/dt$ en función de $i$ para determinar si el punto de equilibrio es estable . . . . .	198
10.6	Figura correcta donde se muestra la evolución real de las trayectorias en el espacio de estados y la dinámica inestable del punto de equilibrio . . . . .	199
10.7	Trayectorias para la llave en posición $u = 0$ . . . . .	201
10.8	Evolución temporal de las variables $v$ e $i$ y trayectorias en el plano de fase para para la llave en posición $u = 1$ . . . . .	201
10.9	Comportamiento inestable de la corriente . . . . .	202
10.10	Determinación gráfica de la estabilidad del voltaje $v$ . . . . .	205
10.11	Trayectorias para distintas referencias de corriente . . . . .	206
10.12	Sistema de conversión fotovoltaica . . . . .	208
10.13	Circuito equivalente de una celda fotovoltaica . . . . .	208
10.14	Curvas características de un diodo y de una celda fotovoltaica	209
10.15	Dependencia de las curvas características de una celda fotovoltaica con la radiación y la temperatura . . . . .	210
10.16	Valores de equilibrio sobre las características del panel fotovoltaico . . . . .	213
10.17	Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	214
10.18	Comportamiento del sistema de conversión de energía fotovoltaica con control de corriente en el espacio de estados . . . . .	215
10.19	Superficie de control, punto de equilibrio y región de MD en el control del sistema fotovoltaico por tensión . . . . .	217

10.20	Estabilidad del punto de equilibrio en el control de tensión del sistema fotovoltaico . . . . .	218
10.21	Trayectorias en el espacio de estados del sistema fotovoltaico con control de tensión . . . . .	218

# Prefacio

Si bien muchas veces no lo percibimos, el 'control' vive embebido en gran parte de las actividades y objetos que nos rodean. Es un soporte esencial para mejorar la salud y calidad de vida de nuestra sociedad a través del impulso de la ciencia, de la tecnología y el desarrollo industrial. Los desafíos para garantizar un desarrollo sustentable y amigable con nuestro ambiente imponen restricciones y acciones de control cada vez mas desafiantes. Sin lugar a dudas el control basado en estructuras variables tiene las bondades para abordar muchos de los desafíos actuales. Las presentes notas buscan introducir en forma simple los conceptos de una de las teorías mas sólidas del control de estructura variable: el control por modos deslizantes. Trata de cubrir una deficiencia en lo referente a libros de textos en el tema, ya que si bien es innumerable la cantidad de trabajos que reportan las cualidades de los modos deslizantes, existe escasa bibliografía introductoria sobre el tema. El presente libro apunta a cubrir las necesidades propias de las actividades de grado de las carreras de ingeniería como las introductorias a una carrera de posgrado. Está basado en el dictado de un curso de posgrado que se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata desde el año 1988 y está nutrido de las dudas que los alumnos han planteado a lo largo del tiempo. El lector seguramente encontrará en estas notas la clara influencia de algunos de los muchos 'próceres' del control por modos deslizantes como Hansruedi Bühler, Hebert Sira Ramírez, Vadim Ivanovich Utkin, entre otros. Varios ejemplos han sido tomados o inspirados en sus trabajos. También podrán encontrar referencias a trabajos propios. En los primeros capítulos el objetivo buscado ha sido plantear en forma sencilla los conceptos fundamentales de los modos deslizantes para hacerlos accesibles a los alumnos de grado interesados. Posteriormente se replantean muchos conceptos con mayor rigurosidad pensando en alumnos de postgrado. Aún así, a lo largo del libro se ha priorizado un lenguaje accesible y abundantes ejemplos y aplicaciones para resaltar las propiedades del control por modos deslizantes. La redacción del presente texto ha sido realizada en el marco de actividades de investigación y docencia de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata y de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.





# 1

## SISTEMAS DE ESTRUCTURA VARIABLE

### 1.1 Preliminares

En sistemas complejos o con altos requerimientos de desempeño, las técnicas convencionales de control pueden evidenciar limitaciones. Para sobrellevarlas suelen combinarse distintos tipos de controladores de manera de aportar la flexibilidad necesaria para alcanzar los objetivos deseados. De ser este el caso, diremos que estamos en presencia de un controlador de estructura variable.

Existen distintos enfoques para abordar el diseño de estos sistemas de control en forma sistemática. Entre otros, podemos citar los enfoques teóricos de control por ganancia tabulada, de control híbrido, de control adaptable, de control de estructura variable, etc. . En este libro, nos detendremos en el control por modos deslizantes que, en realidad, es un modo particular de operación de los sistemas de control de estructura variable.

Para tomar conciencia de cuán comunes son estos sistemas de control de estructura variable, consideremos los siguientes ejemplos

- Considere que quiere estacionar su auto y que ha encontrado un lugar para hacerlo que es ligeramente mayor que el largo de su vehículo. ¿Cree usted que podrá estacionarlo en una sola maniobra como se indica en la figura 1.1a?. Difícilmente pueda hacerlo en una sola maniobra. Pero, muy probablemente pueda estacionarlo en tres maniobras como se indica en la parte b) de la figura. De hacerlo así, se puede decir que usted ha recurrido a un esquema de control de estructura variable. Efectivamente, en cada maniobra habrá modificado las condiciones que rigen el comportamiento del vehículo (el sistema de

dirección tiene distintos efectos dependiendo de que se maneje hacia adelante o en reversa).

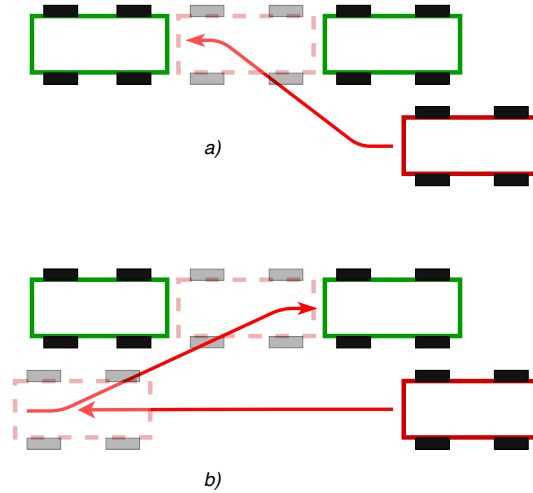


Figure 1.1: a) Intento de estacionamiento en una maniobra, b) estacionamiento en tres maniobras

- El circuito de la figura 1.2 corresponde a una fuente de alimentación conmutada Boost. La llave es controlada a partir de una función de las variables de estado del convertidor (corriente en el inductor y tensión sobre el capacitor). Note que la estructura del sistema cambia por completo dependiendo de la posición de la llave. Si la llave está en la posición 1, el sistema presenta dos polos complejos que resultan de la serie del inductor  $L$  con el paralelo  $RC$ . Por el contrario si la llave está en la posición 2, el sistema presenta dos polos reales: un polo en el origen y otro en  $-1/RC$ .

Luego, podemos decir que el convertidor Boost, al igual que otros circuitos electrónicos de potencia que emplean dispositivos actuando como llaves, son sistemas de estructura variable.

- Las ecuaciones básicas de tracción con las que podemos modelar un vehículo con caja automática son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = \Omega \\ \dot{x}_2 &= \dot{\Omega} = \eta(\Omega, q)u \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde la aceleración del vehículo depende, además de la inyección de combustible  $u$ , de una función compleja  $\eta$  de la velocidad del motor  $\Omega$ ,

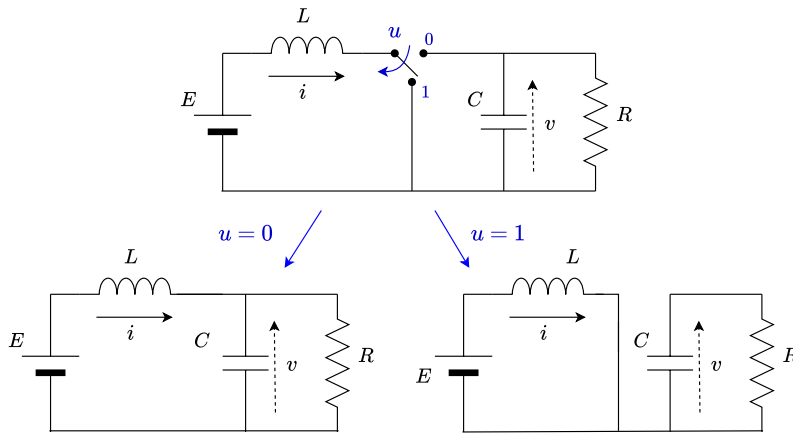


Figure 1.2: Fuente conmutada Boost

y de la posición  $q$  de la caja de cambios (figura 1.3) . Con el objetivo de trabajar con máxima eficiencia, el control de la caja modifica el cambio  $q$  a partir de la medida de la velocidad  $\Omega$ . La modificación abrupta de las ecuaciones (1.1) frente a cada cambio de  $q$ , ponen en evidencia las características de estructura variable del control.

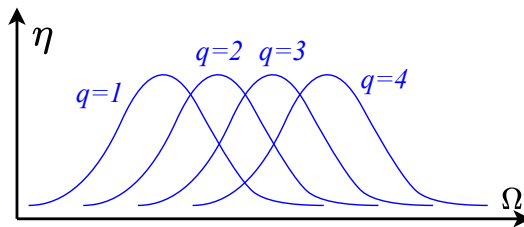


Figure 1.3: Eficiencia de una caja automática de velocidades

- El control de un sistema que presenta saturación en la entrada (figura 1.4) puede ser analizado con conceptos de estructura variable más allá de que el controlador sea continuo. Note que en la zona lineal el sistema realimentado presentará la dinámica correspondiente a los polos de lazo cerrado (es decir, las raíces del polinomio  $1 + G(s)C(s)$ ), mientras que si el sistema entra en saturación la dinámica del sistema estará definida por los polos de lazo abierto (es decir los polos de  $G(s)$ ). Es decir, cada vez que la señal  $u$  incursiona en la región de saturación, el sistema cambia de estructura.

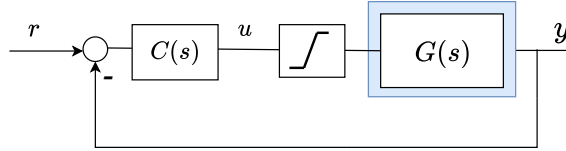


Figure 1.4: Control de un sistema con saturación de entrada

- A lo largo de la historia del control, muchas veces se han combinado conceptos básicos de control clásico para mejorar el comportamiento de un sistema. Por ejemplo, ¿por qué no alternar entre dos (o más) ganancias de lazo dependiendo de que el error sea grande o chico?. Por ejemplo, la figura 1.5 muestra la respuesta de un sistema con ganancia  $K_1$  y otro con ganancia  $K_2 > K_1$ . El sistema con ganancia  $K_2$  muestra buen tiempo de crecimiento pero un importante sobrepaso. El sistema con ganancia  $K_1$ , por el contrario, no presenta sobrepaso pero su tiempo de respuesta es muy lento. Combinando las dos ganancias ( $K_2$  cuando el error es grande y  $K_1$  cuando es chico) puede obtenerse una respuesta que combina las bondades de cada ganancia.

Otro ejemplo similar es el control conocido como posicast, en donde se complementa el accionar de un compensador que da una respuesta muy subamortiguada con el manejo de la referencia. La figura 1.6 esquematiza el control posicast. En un primer paso sólo se aplica un porcentaje  $\alpha$  de la referencia deseada, tal que el sobrepaso máximo alcance el valor deseado. Cuando esto se produce, se completa el 100% de la referencia. La respuesta obtenida combina buena velocidad de respuesta con alcance en tiempo finito y sin sobrepaso. También se muestra en la figura 1.6 el comportamiento en el plano de fase. En un principio la trayectoria subamortiguada evoluciona hacia el punto de equilibrio  $\alpha r$ , al pasar por el punto  $(r,0)$  y modificarse la referencia, el sistema encuentra que tanto el error  $r - y$  como su derivada  $-\dot{y}$  son cero, luego la salida permanece en el valor  $r$  deseado.

Estos pocos ejemplos deberían servir para darnos cuenta que, en realidad, los controladores de estructura variable son bastante frecuentes. Es más, lo invito a pensar en otros sistemas de control, es muy probable que encuentre que la mayoría de ellos realmente son de estructura variable.

## 1.2 Algunos comportamientos distintivos

A simple vista, podría parecer que no se necesitan herramientas especiales para el diseño de controladores de estructura variable y que todo se podría

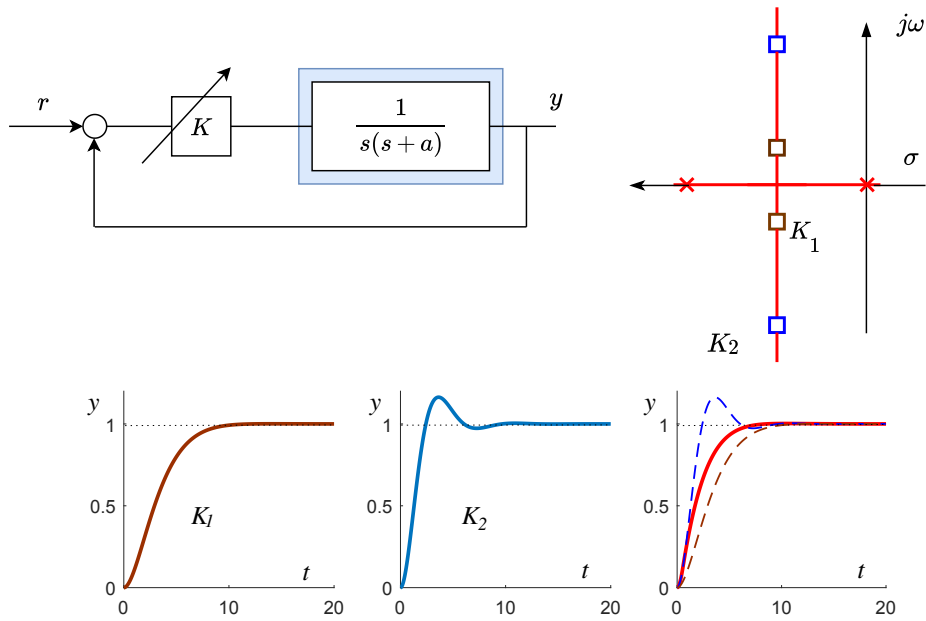


Figure 1.5: Combinación de ganancias para mejorar la respuesta transitoria

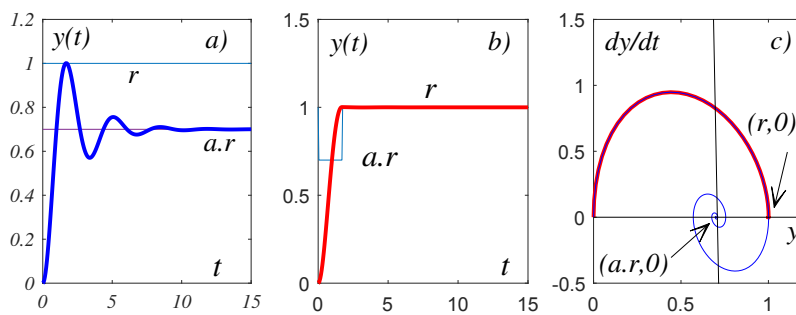


Figure 1.6: Control Posicast

reducir al conocimiento de conceptos básicos de la teoría de los sistemas realimentados y a la intuición del diseñador. **Pero cuidado!!!** Uno nunca debería darle la espalda a un sistema de estructura variable. No debería fiarse de ellos ya que pueden presentar comportamientos inesperados para aquellos acostumbrados a trabajar con sistemas lineales. Citemos sólo algunos de estos comportamientos que nos servirán de introducción al tema central de este libro:

1) Considere un sistema de estructura variable con dos estructuras que dependen del estado de una llave. Considere también que cualquiera de las estructuras corresponde a un sistema estable. La intuición podría decirle que si se conmuta entre dos sistemas estables, el sistema resultante también debería ser estable. Sin embargo, NO. El sistema conmutado puede ser inestable.

2) Considere un caso similar al previo pero donde, independientemente del estado de la llave, el sistema es inestable (es decir, si la llave está abierta, el sistema que resulta es inestable, y si la llave está cerrada, el sistema también es inestable). ¿Qué le dice su intuición acerca de la estabilidad del sistema completo cuando la llave esté conmutando? Para sorpresa de varios, el sistema podría ser estable.

3) Un sistema de estructura variable, donde el orden de cada estructura es  $n$  (es decir, tienen  $n$  polos), podría presentar una dinámica de menor orden cuando conmuta. Es decir, como si la conmutación diera lugar a una pérdida de polos. Extraño, ¿no?.

4) La conmutación entre dos sistemas con parámetros variables podría dar lugar a un sistema en el cual sus parámetros fuesen constantes. En otras palabras, el sistema conmutado podría ser completamente insensible a cambios de parámetros.

5) La conmutación entre dos estructuras donde, cada una, esté sometida a perturbaciones podría dar lugar a un sistema completamente insensible a ellas.

6) La conmutación entre dos sistemas no lineales, podría dar lugar a un sistema lineal.

7) Ante una excitación, el sistema conmutado podría alcanzar el estado estacionario en tiempo finito. Note que, desde el punto de vista teórico, los sistemas lineales siempre presentan transitorios de duración infinita, aunque desde el punto de vista práctico puedan considerarse agotados después de un tiempo. Por ejemplo, la descarga de un capacitor a través de una resistencia

es una exponencial que, teóricamente, nunca se agota, sin embargo, desde el punto de vista práctico se puede considerar que se ha descargado luego de algunas constantes de tiempo. Los sistemas conmutados pueden alcanzar el estado estacionario, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, en tiempo finito.

8) Más extraño que el punto previo, podría parecer que los SEV pueden alcanzar el estado estacionario en tiempo finito, aún considerando que para ello necesitan conmutar infinitas veces y que los tiempos entre conmutaciones son finitos.

Podríamos citar más comportamientos que, a primera vista, podrían llamarnos la atención. Sin embargo, los ya enumerados deberían ser suficientes para despertarle cierta curiosidad por los sistemas de estructura variable.

## 1.3 Ejemplos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos para convalidar las afirmaciones realizadas en la sección previa referidas a algunos comportamientos que pueden presentar los sistemas de estructura variable. Estos ejemplos nos mostrarán que en realidad los comportamientos no son tan extraños, y nos servirán para introducir el tema central de este libro: el control de sistemas por Modos Deslizantes.<sup>1</sup>

### 1.3.1 Ejemplo 1

Consideremos el sistema de la figura 1.7,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k(r - x_1)\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde a los efectos de analizar la estabilidad podemos considerar  $r = 0$ . Resulta inmediato ver que, más allá del valor de la ganancia  $k$ , el sistema de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{k}{s^2 + k}\tag{1.3}$$

presenta un comportamiento oscilatorio cuya frecuencia es  $\omega = \sqrt{k}$ .

---

<sup>1</sup>Desarrollaremos estos ejemplos en detalle a modo de repaso de algunos conceptos de plano de fase, herramienta gráfica de suma utilidad para entender las primeras ideas de los modos deslizantes

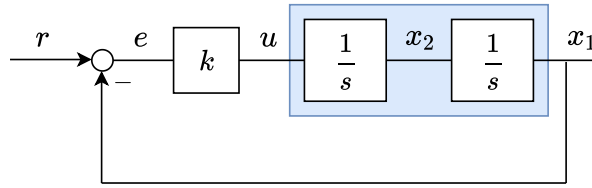


Figure 1.7: Doble integrador realimentado en forma lineal

Recordemos rápidamente que tipo de trayectorias presenta este sistema en el espacio de estados. Para esto, debemos expresar  $x_2$  como una función de  $x_1$ . Es decir, debemos eliminar la variable tiempo de su forma explícita en las ecuaciones (1.2) e integrar siguiendo los siguientes pasos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k x_1}{x_2} \quad (1.4)$$

$$\Rightarrow x_2 dx_2 = -k x_1 dx_1 \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2(0)}^{x_2(t)} = -k \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_1(0)}^{x_1(t)} \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow k x_1^2(t) + x_2^2(t) = \underbrace{k x_1^2(0) + x_2^2(0)}_c \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) nos está indicando que las trayectorias en el plano de fase son elipses cuya orientación depende del valor de la ganancia  $k$ . Para valores de  $k > 1$  las elipses se orientan en la dirección del eje  $x_2$ , para valores de  $k < 1$  las elipses se orientan en la dirección de  $x_1$ , y para el caso particular en que  $k = 1$  las trayectorias son circunferencias. La amplitud de las elipses queda determinada por la condición inicial  $(x_1(0), x_2(0))$  que intervienen en la constante  $c$  de (1.7). En la figura 1.8 se muestran los lugares de raíces, las trayectorias en el plano de fase y la evolución de los estados  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para  $k = 4$ ,  $k = 1$  y  $k = 0,4$ . Se observa que para la condición inicial elegida  $(x_1(0) = 1, x_2(0) = 0)$ , las amplitudes de las oscilaciones de  $x_1(t)$  son independientes de la ganancia  $k$ . Sin embargo,  $k$  modifica la frecuencia ( $\omega = \sqrt{k}$ ) y, por consiguiente, la derivada máxima de  $x_1(t)$  (es decir, la máxima amplitud de  $x_2(t)$  que es la ordenada en el plano de fase). Esto explica la orientación de las elipses para las ganancias  $k > 1$  y  $k < 1$  en el plano de fase  $((x_1, x_2 = \dot{x}_1))$ .



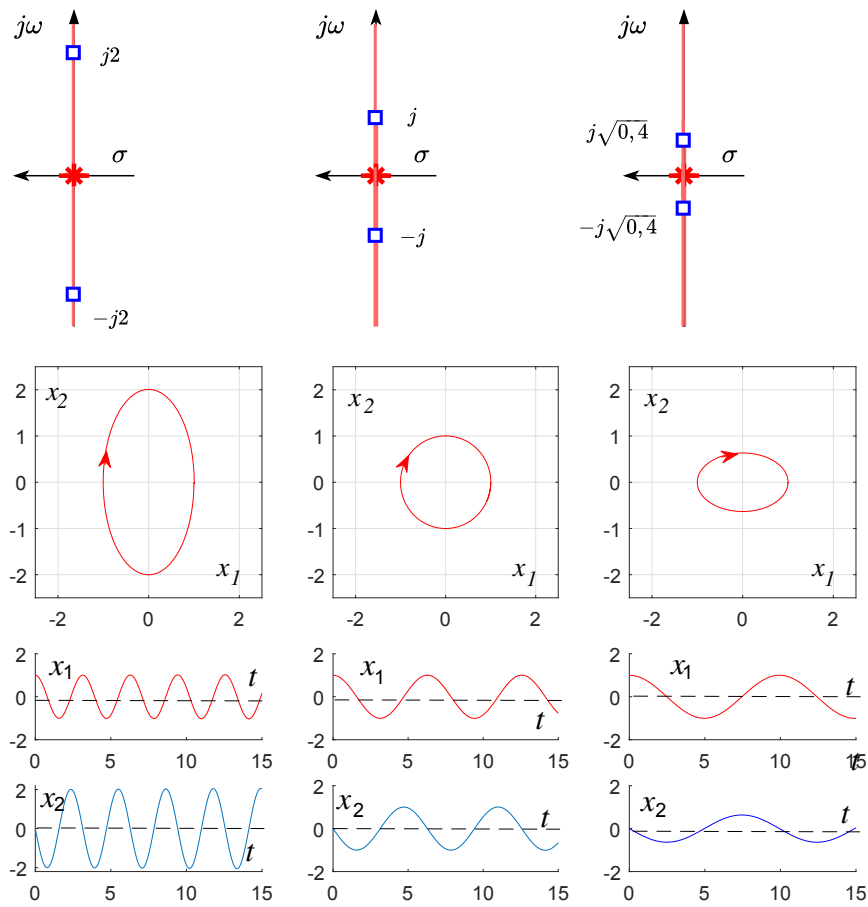


Figure 1.8: Lugar de raíces, trayectorias en el plano de fase y respuesta temporal del doble integrador realimentado linealmente

Sin necesidad de hacer nuevos cálculos podemos intuir como serían las trayectorias y evolución de las variables de estado si uno de los polos de lazo abierto del sistema de la figura 1.7 se desplazara del origen. La figura 1.9 muestra como serían las trayectorias si uno de los polos de lazo abierto del sistema se corriera ligeramente hacia la izquierda o hacia la derecha, dando lugar a dinámicas estables o inestables respectivamente. Para el caso dibujado, las respuestas corresponden a comportamientos muy subamortiguados.

Ahora sí. Habiendo recordado como son las trayectorias de los sistemas lineales con dinámicas oscilatorias o poco amortiguadas, vamos a resolver un ejemplo que de sustento a las afirmaciones de los puntos 1) y 2) de la sección previa.

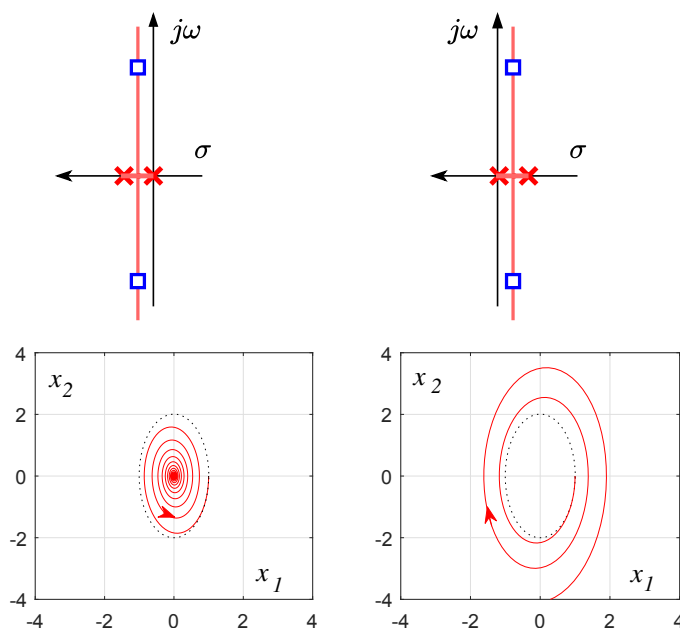


Figure 1.9: Trayectorias en el plano de fase de sistemas altamente subamortiguados (estables e inestables)

Considere el sistema de estructura variable de la figura 1.10 donde dependiendo del estado de la llave  $L$ , un sistema con dos integradores es realimentado con una ganancia que puede tomar los valores 4 o 0,4. La llave es comandada de acuerdo al valor de los estados como se indica en la figura 1.10. Si los estados transitan por el primer o por el tercer cuadrante, la llave permanece en A, caso contrario la llave permuta a la posición B.

La parte c) de la figura 1.10 muestra el comportamiento del sistema realimentado en el plano de fase para la condición inicial  $(x_1(0) = 1, x_2(0)=1)$ . La misma está compuesta de tramos de elipses con distintas orientaciones dependiendo de la ganancia aplicada, es decir de la región por la que transitan los estados. Efectivamente, partiendo de la condición inicial, el primer tramo de la trayectoria es un cuarto de elipse orientada horizontalmente. Esta orientación se mantiene mientras los estados viven en el cuarto cuadrante. Cuando los estados pasan al tercer cuadrante la trayectoria se corresponde con un tramo de elipse “vertical”, y evoluciona de esta manera hasta que los estados alcanzan el segundo cuadrante donde la trayectoria vuelve a ser un tramo de elipse orientado horizontalmente. La parte d) de la figura muestra la variable controlada en el dominio del tiempo, compuesta por tramos de sinusoides de distintas frecuencias.

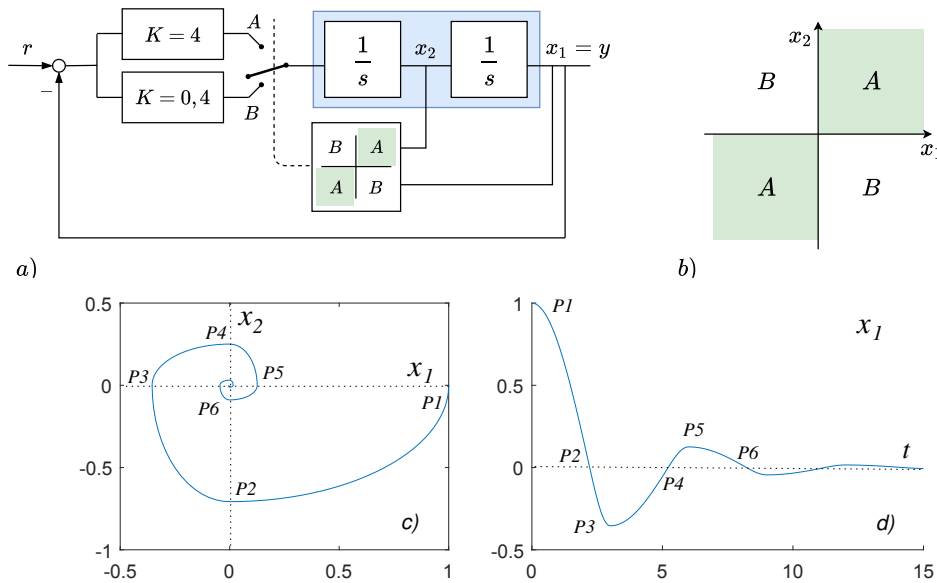


Figure 1.10: Sistema conmutado con dos valores de ganancias

Vemos que la trayectoria converge al origen indicando que el sistema conmutado es estable a pesar que en cualquiera de las posiciones de la llave  $L$ , el sistema se comportaba en forma oscilatoria. Esto verifica la afirmación 2) de la sección 1.2. Pero, para ser más contundentes, podemos considerar que uno de los polos del sistema de lazo abierto está desplazado hacia el semiplano derecho. Esto daría lugar a que el sistema de lazo cerrado presente dos polos en el semiplano derecho independientemente de que la ganancia fuese 0,4 o 4. En este caso la trayectoria estará compuesta de tramos de espirales como las indicadas en la parte b) de la figura 1.9 (focos inestables). Sin embargo, como vemos en la figura 1.11, el sistema conmutado es estable!

Para convalidar la afirmación 1) referida a que la conmutación entre dos sistemas estables puede ser inestable, introducimos un cambio en el sistema de la figura 1.10. Consideramos ahora el caso donde uno de los polos del sistema en el origen se desplaza hacia la izquierda. En este caso, independientemente de que la llave esté en la posición A o en la B, el sistema de lazo cerrado tendrá sus dos raíces en el semiplano izquierdo (siempre suponiendo ganancias positivas). Es decir, el sistema conmuta entre dos sistemas estables. Pero hagamos un cambio en la lógica de la conmutación de la llave como el indicado en la figura 1.12. Conmutemos la llave a la posición A si los estados transitan por los cuadrantes 2 y 4. Caso contrario la llave pasa a la posición B.

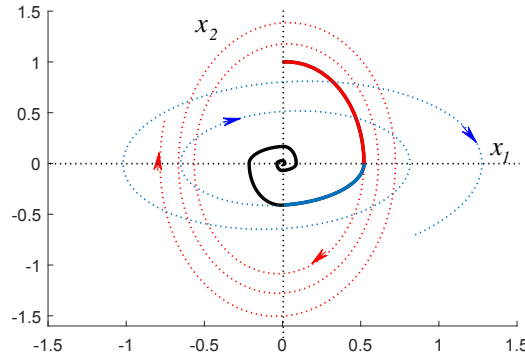


Figure 1.11: Sistema conmutado estable a partir de la conmutación de dos sistemas inestables

Como se muestra en las partes c) y d) de la figura 1.12 el sistema conmutado es inestable a pesar que las estructuras que resultaban para las dos posiciones de la llave eran estables.

### 1.3.2 Ejemplo 2

Considere nuevamente el sistema de lazo abierto

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= Cu\end{aligned}\tag{1.8}$$

que a los efectos de facilitar la explicación, podríamos asimilarlo bajo algunas idealizaciones a un servomotor (figura 1.13). Efectivamente si despreciamos la fricción  $B$  y consideramos que la excitación es la corriente de armadura, el modelo se aproxima a (1.8) donde  $C = k/J$ , con  $k$  la constante del motor de corriente continua y  $J$  el momento de inercia. Luego, a los fines de la explicación, consideramos que el modelo de dos integradores es el de un servomotor con estados posición y velocidad.

Evaluemos la posibilidad de controlar el servomotor con un controlador de máximo esfuerzo como se indica en la figura 1.14. Podemos decir que este sistema es de estructura variable en el sentido que, frente a determinados eventos (signo del error en este caso), cambia abruptamente de excitación. El interés por realizar esta evaluación podría estar vinculado en tratar de mejorar la velocidad de respuesta del servomecanismo aprovechando la máxima aceleración posible ( $+M_1$ ) y la máxima capacidad de frenado ( $-M_1$ ).

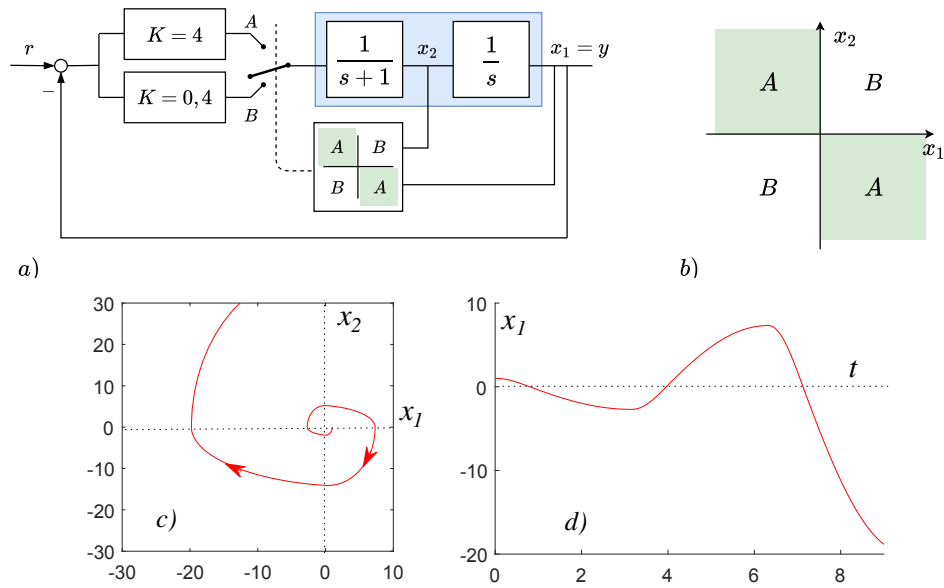


Figure 1.12: Sistema conmutado inestable a partir de la conmutación de dos sistemas estables

Veamos como responde el "servomotor" (el doble integrador en realidad) en el plano de fase frente a cada uno de los dos valores de excitación posibles. Luego

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= Cu = C(\pm M_1) = \pm M \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde, hemos incorporado la constante  $C = k/J$  al bloque no lineal. Desde el punto de vista del análisis, esto equivale a considerar un actuador de máximo esfuerzo de amplitud  $\pm M$  excitando a un doble integrador. Para obtener las trayectorias en el plano de fase, seguimos los siguientes pasos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\pm M}{x_2}, \tag{1.10}$$

$$x_2 dx_2 = \pm M dx_1, \tag{1.11}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{2} \Big|_{x_2(0)}^{x_2(t)} = \pm M x_1 \Big|_{x_1(0)}^{x_1(t)}, \tag{1.12}$$

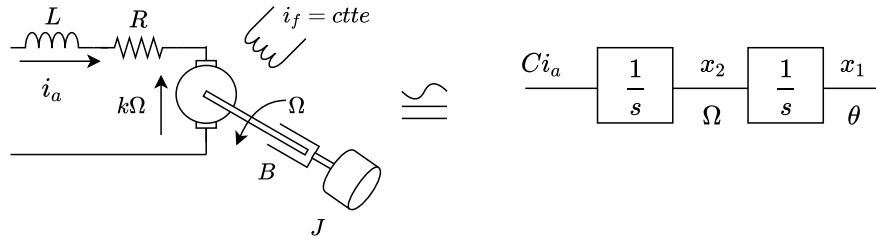


Figure 1.13: Servomotor de continua y modelo idealizado

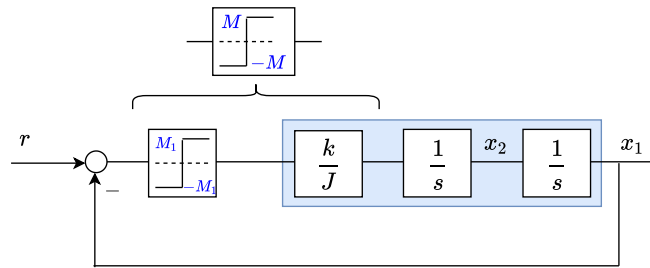


Figure 1.14: Control de máximo esfuerzo del servomotor de continua

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = x_1(0) + \frac{x_2^2(t) - x_2^2(0)}{2 \underbrace{u}_{\pm M}}. \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) nos dice que las trayectorias  $x_2 = f(x_1)$  en el plano de fase son parábolas que, partiendo de la condición inicial  $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ , están orientadas a lo largo del eje  $x_1$  (posición). Dependiendo que la acción de control tome el valor positivo  $+M$  o negativo  $-M$ , las parábolas "mirarán" hacia la derecha o izquierda, respectivamente (figura 1.15). Note también que el valor de  $M$  define la apertura de las parábolas.

Luego, las trayectorias del sistema realimentado de la figura 1.14 estarán compuestas de tramos de parábolas ya que  $u$  sólo puede tomar los valores  $M$  o  $-M$  dependiendo del signo del error. Analicemos un caso particular. Consideremos que estando los estados en reposo en  $x_1(0) = 0$  y  $x_2(0) = 0$ , se introduce un cambio en la referencia  $r$  (valor de posición deseado  $r = 1$ ). La figura (1.16) muestra tanto el comportamiento del sistema en el plano de fase, como la evolución temporal de los estados.

Lo primero que observamos es que no fue buena idea controlar el ser-

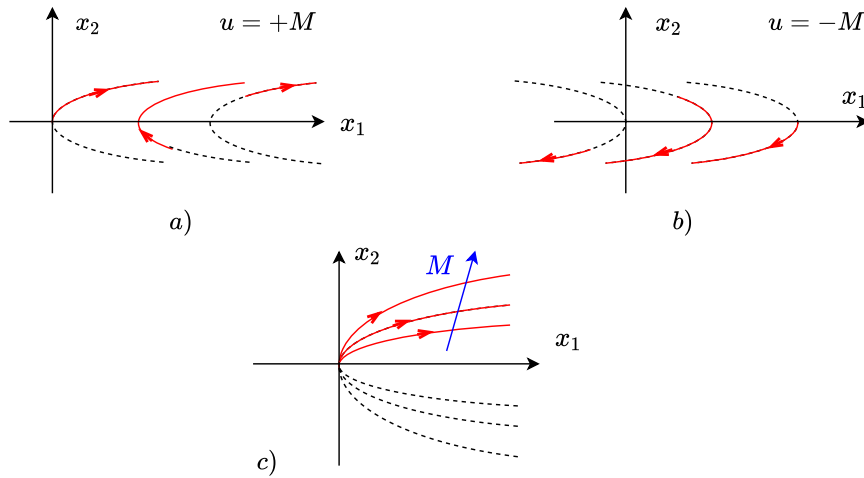


Figure 1.15: Trayectorias para a)  $u = M$ , para b)  $u = -M$ . c) Apertura de las trayectorias en función de  $M$

vomotor con un actuador de máximo esfuerzo. La trayectoria cerrada nos indica que el sistema está oscilando, cosa que también corroboramos en la evolución temporal de los estados. Analicemos en el plano de fase que sucedió. Antes de la aparición de la referencia, el sistema estaba en reposo en  $A$ . Aparecida la referencia, el error se hace positivo y, por consiguiente la acción de control  $u$  toma el valor  $+M$ . La velocidad y posición evolucionan con una trayectoria parabólica orientada en la dirección de las posiciones ( $x_1$ ) crecientes. Siguen con esta ley de evolución mientras el error es positivo, es decir mientras la posición  $x_1$  sea menor que la referencia  $r$ . Cuando la posición alcanza el valor  $r$  (punto  $B$ ), el error cambia de signo, la acción de control pasa a tomar el valor  $-M$  y a partir de ahí la trayectoria pasa a ser una parábola orientada hacia el eje negativo de la abscisa  $x_1$ . La trayectoria sigue esta ley hasta tanto el error no vuelve a cambiar de signo, cosa que sucede en el punto  $D$ . De ahí en mas, la trayectoria vuelve a ser una parábola "positiva" repitiendo los lugares recorridos previamente, dando lugar a una trayectoria cerrada que indica que el sistema oscila.

Notemos que

- Si nos hubiéramos detenido unos instantes en la física del problema, el comportamiento habría sido fácilmente predicho. Efectivamente, si el frenado recién se inicia cuando la posición alcanza la referencia ( $x_1 = r$ ) siendo la velocidad distinta de cero, la inercia impide la detención instantánea del servomotor. Lo que es instantáneo (siempre bajo la simplificación del modelo) es el cambio en la fuerza de frenado o de desaceleración. Luego, es natural que el sistema presente un sobrepaso, que al no haber rozamiento

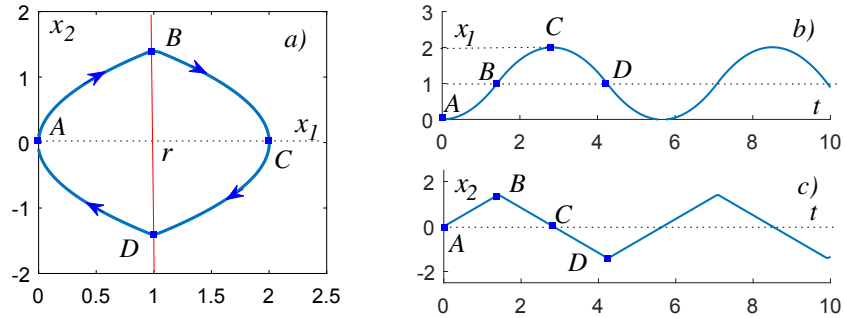


Figure 1.16: a) Trayectoria del sistema de la figura 1.14 en el plano de fase, b) evolución temporal del estado  $x_1$ , c) evolución temporal del estado  $x_2$ .

llega a un 100% ( $x_{1max} = 2r$ ).

- La oscilación no es sinusoidal, la trayectoria cerrada nos dice que hay una oscilación pero para que ésta sea sinusoidal la trayectoria debería ser una elipse. La respuesta temporal de la posición  $x_1(t)$  puede encontrarse a partir de resolver las ecuaciones diferenciales (1.8) a tramos con las condiciones iniciales de los puntos  $A, B, \dots$ . En este caso, la forma de las respuestas temporales de posición y velocidad son fáciles de deducir por inspección. Dado que la aceleración es constante a tramos, su integral, la velocidad  $x_2(t)$ , será lineal a tramos y la posición  $x_1(t)$  estará compuesta de tramos de parábolas.

- Como la pésima respuesta se ha debido a la acción tardía para comenzar el frenado, podemos remplazar la recta de conmutación  $x_1 = r$  por la indicada en la figura 1.17

$$x_2 = \frac{1}{k}r - \frac{1}{k}x_1, \quad (1.14)$$

que nos permite adelantar la conmutación al punto  $B_1$ . Esto es muy fácil de implementar, sólo es necesario incluir una realimentación de la velocidad como se indica en la parte b) de la figura.

Con la ganancia  $k$  que define la pendiente de la recta, puede regularse el grado de anticipación con que se inicia el frenado. Efectivamente, la inclinación de la recta permite que la conmutación del relé se anticipe al punto  $B_1$  en lugar del punto  $B$  y, por consiguiente, es esperable que la respuesta del sistema mejore. Dependiendo de la inclinación de la recta, pueden presentarse 3 comportamientos distintos (Figuras 1.18)

- existe una ganancia  $k_o$  para la cual el frenado se inicia en el instante



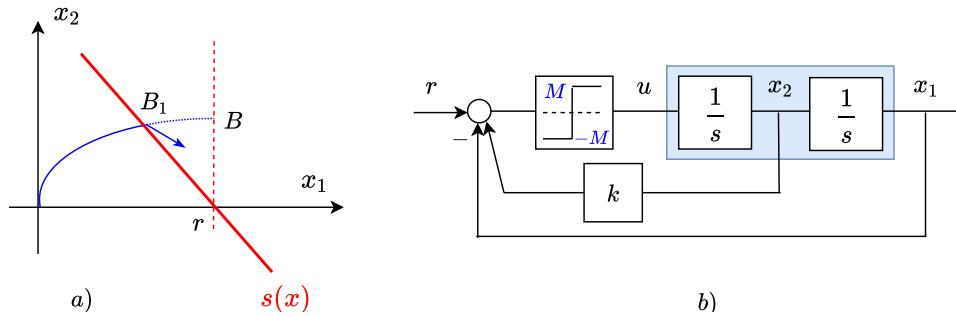


Figure 1.17: Cambio de recta de conmutación y diagrama para su implementación

justo (cuando  $x_1 = r/2$ ) para alcanzar la referencia deseada en dos conmutaciones. Puede demostrarse que el tiempo empleado en alcanzar la referencia es el mínimo posible para la acción de control disponible (Figura 1.18a). La respuesta transitoria de  $x_1$  consta de dos tramos de parábolas  $AB$  y  $BC$ , alcanzando en estado estacionario en tiempo finito (lo cual corrobora la afirmación 7 de la sección 1.2). En correspondencia con  $x_1$ , el transitorio de la velocidad  $x_2$  consta de tramos lineales (aceleración y frenado).

- si la ganancia toma un valor  $k < k_o$  la pendiente de la recta será más pronunciada (Figura 1.18 b) y si bien la conmutación se adelanta con respecto al caso sin realimentación de la velocidad, no lo hace lo suficiente como para tener el comportamiento óptimo. Por consiguiente serán necesarias más conmutaciones para alcanzar la referencia. Note que los tramos de trayectoria en el plano de fase siguen siendo tramos de parábolas. A su vez, la velocidad en el tiempo varía a tramos lineales y la posición alcanza el equilibrio con tramos de parábolas.
- por último si  $k > k_o$ , la pendiente de la recta será menor y puede darse el caso de la figura 1.18 c, donde se producen sucesivos cruces de la recta de conmutación. Efectivamente, una vez alcanzada la superficie en el punto  $B$ , la acción de control negativa da lugar a una parábola que inmediatamente vuelve a cruzar la superficie y el relé vuelve a conmutar haciendo que la trayectoria nuevamente cruce la recta. Este proceso se repite hasta alcanzar el punto de equilibrio  $x = r$ . Si la conmutación se produce a muy alta frecuencia, la trayectoria se iría "deslizándose" en un entorno muy próximo a la recta de conmutación. Es decir, el sistema alcanzaría el equilibrio sin sobrepaso con el relé

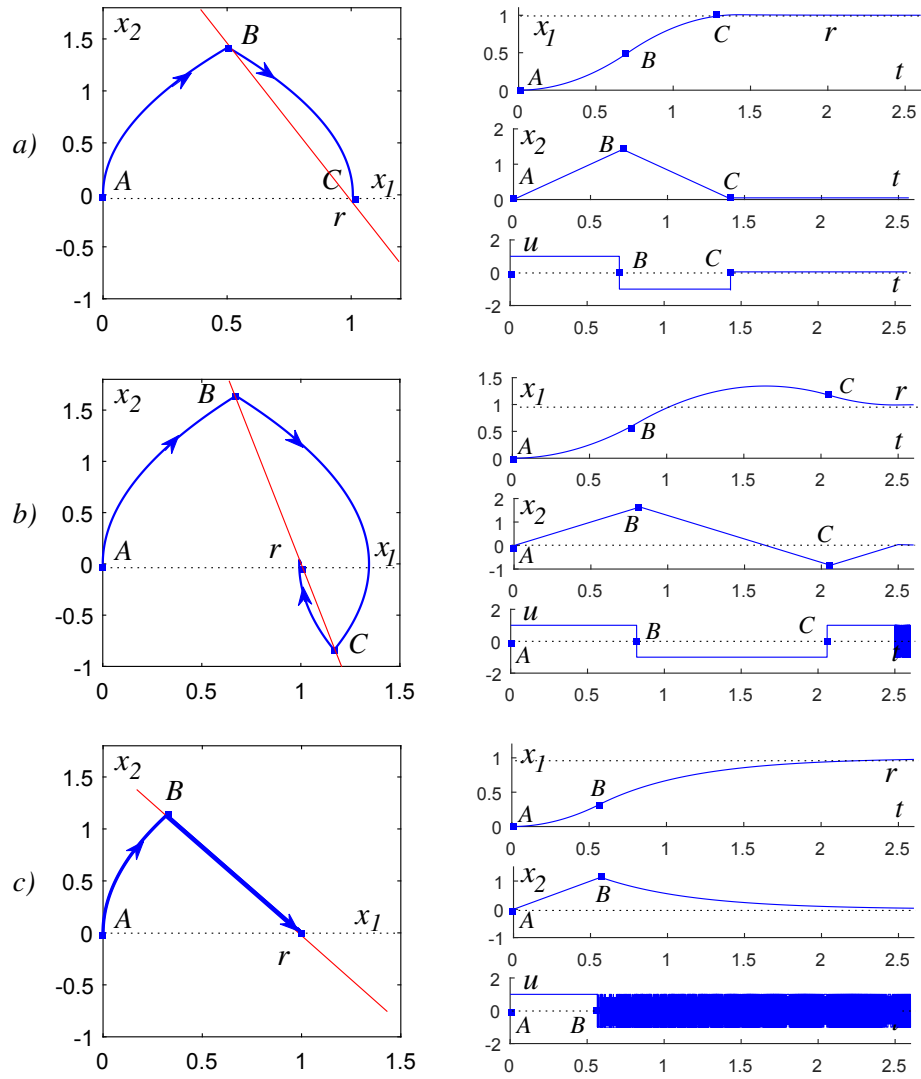


Figure 1.18: a) Conmutación con respuesta temporal óptima, b) conmutación tardía y c) conmutación anticipada

conmutando permanentemente. (figura 1.18 c)

Si el objetivo original era reducir el tiempo de alcance de la referencia, está claro que la mejor respuesta se corresponde con la figura 1.18a. Aún así, el comportamiento de la figura 1.18c, denominado modo deslizante, tiene sus atractivos. Veamos algunos. Para ello continuemos con el análisis de la figura 1.18c. En la trayectoria se distingue, un primer tramo  $AB$  que se corresponde a una respuesta temporal que es una parábola (es decir, tiene la dinámica de los dos integradores). A partir de  $B$ , si aceptamos que el relé puede conmutar a frecuencia "infinita" (muy alta desde el punto de vista práctico), la trayectoria vive en una recta de pendiente  $-1/k$  hasta alcanzar el equilibrio. La solución de la ecuación diferencial definida por la recta

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + \lambda r \quad (1.15)$$

es una exponencial

$$x_1 = r(1 - e^{-\lambda t}) \quad (1.16)$$

de constante de tiempo  $\tau = 1/\lambda = 1/k$ . Esto nos está indicando que, a partir del punto  $B$ , el sistema se comporta como uno de primer orden. Es como si a partir de este punto, el sistema hubiese perdido un estado. Este comportamiento era el que habíamos comentado en el punto 3) de la sección anterior.

Otro hecho llamativo es que si variara la inercia  $J$  o la ganancia  $k$  se modificaría el valor de  $M = M_1 k/J$ , pero no la respuesta temporal del sistema una vez que la trayectoria se desplaza (o desliza) sobre la recta y la respuesta temporal sigue siendo (1.16). Luego, a partir del punto  $B$ , puede decirse que el sistema es totalmente robusto al cambio de alguno de estos parámetros. La "robustez absoluta" es un hecho imposible de alcanzar en sistemas realimentados en forma continua.

### 1.3.3 Ejemplo 3

Considere el péndulo de la figura 1.19. Si tomamos como variables de estado la posición  $\theta$  y la velocidad angular  $\Omega$ , el péndulo puede ser modelado por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= \frac{lP}{J} \text{sen}(\pi - \theta) + \frac{1}{J}u \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde  $P$  es el peso,  $J$  el momento de inercia y  $u$  es un par que se aplica externamente y que puede tomar sólo uno de dos valores extremos (por ejemplo -1 y 1). Vemos que el modelo es no lineal y sabemos, por experiencia, que a lazo abierto (con  $u = 0$  por ejemplo) va a alcanzar su punto de equilibrio en forma oscilatoria amortiguada (que no es sinusoidal amortiguada ya que el sistema es no lineal).

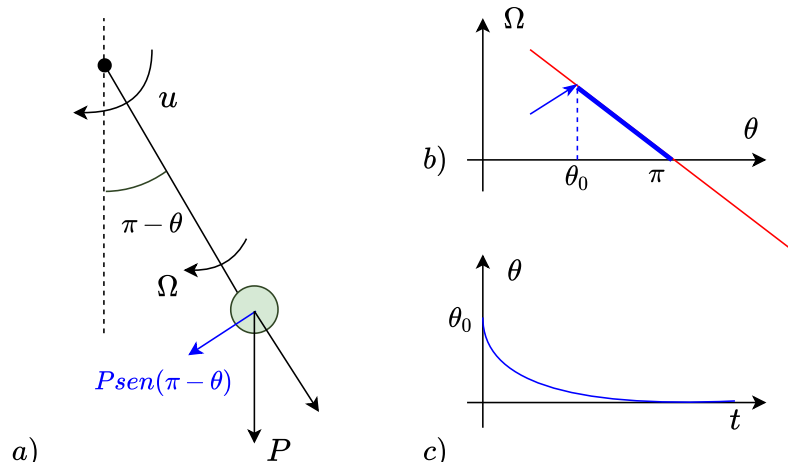


Figure 1.19: a) Péndulo, b) respuesta temporal con control de estructura variable

Supongamos ahora, que el valor del par  $u$  (+1 o -1) resulta de una evaluación de los estados dependiendo que

$$\pi - \theta - k\Omega > 0 \quad \text{o} \quad \pi - \theta - k\Omega < 0, \quad (1.18)$$

donde  $k$  es una constante (ver figura 1.19).

La figura 1.19 muestra la trayectoria en el plano de fase. Como ésta última es una recta, el punto de equilibrio se alcanza en forma exponencial con la dinámica de un sólo autovalor de constante de tiempo  $\tau = 1/k$  (es decir, la inversa de la pendiente de la recta que resulta de igualar a cero (1.18). Luego pese a que el péndulo es no lineal tanto cuando  $u = +1$  como cuando  $u = -1$ , el sistema conmutado es lineal. Luego, podemos concluir que la afirmación 6) de la sección previa también es válida, es decir que la conmutación entre estructuras no lineales puede dar lugar a comportamientos lineales. Al igual que en el ejemplo previo, a partir de  $\theta = \theta_0$  el péndulo

también presenta una dinámica de orden reducido.

### 1.3.4 Ejemplo 4

Consideremos un problema clásico de física y analicémoslo en el contexto de los sistemas de estructura variable. La figura 1.20 muestra los sucesivos piques que realiza una pelotita que se deja caer desde una altura  $H$ . Su movimiento puede ser descrito por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{h} &= v \\ \dot{v} &= -g,\end{aligned}\tag{1.19}$$

donde  $h$  es la altura,  $v$  la velocidad y  $g$  la gravedad (se considera que la masa de la pelotita es unitaria). En este ejemplo, el “cambio de estructura” está asociado a un cambio abrupto de velocidad después de cada pique

$$v(t^+) = -r v(t^-),\tag{1.20}$$

donde  $r \in (0,1)$  es un factor que depende de la elasticidad del material de la pelotita.

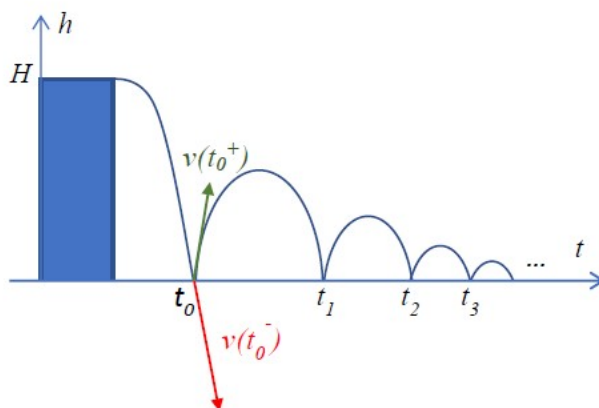


Figure 1.20: Rebotes de una pelota que se deja caer

La solución de las ecuaciones diferenciales 1.19 es

$$\begin{aligned}v(t) &= v(t_0) - g(t - t_0) \\ h(t) &= h(t_0) + v(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\end{aligned}\tag{1.21}$$

Calculemos el tiempo que transcurre entre los dos primeros piques. Para ello, consideremos el tiempo inicial  $t_0 = 0$  el que corresponde al primer pique. Luego, en  $t_0 = 0$ ,  $h(t_0) = 0$  y, sin pérdida de generalidad, tomamos una velocidad normalizada  $v(t_0^+) = 1$ .

La velocidad en el instante previo al segundo pique

$$v(t_1^-) = -1 = 1 - g(t_1 - t_0), \quad (1.22)$$

y, por consiguiente, el tiempo  $T_1$  entre los primeros 2 piques es

$$T_1 = (t_1 - t_0) = \frac{2}{g}. \quad (1.23)$$

Calculando sucesivamente los tiempos  $t_2^-$ ,  $t_3^-$ , ... previos a cada pique, podemos ir calculando los períodos entre piques  $T_2 = (t_2 - t_1)$ ,  $T_3 = (t_3 - t_2)$ , ...

$$\begin{aligned} v(t_2^-) &= -r = r - g(t_2 - t_1) \\ T_2 &= (t_2 - t_1) = \frac{2r}{g} \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} v(t_3^-) &= -r^2 = r^2 - g(t_3 - t_2) \\ T_3 &= (t_3 - t_2) = \frac{2r^2}{g} \end{aligned} \quad (1.25)$$

...

Vemos que, no es necesario calcular más períodos para intuir que

$$T_i = \frac{2r^{i-1}}{g}. \quad (1.26)$$

Según el modelo teórico considerado, la pelota realizará infinitos piques que demandan un tiempo finito cada uno (ecuación (1.26)). Si sumamos todos los períodos entre piques, tendríamos el tiempo total

$$T_{total} = \frac{2}{g} + \frac{2r^1}{g} + \frac{2r^2}{g} + \dots + \frac{2r^{i-1}}{g} + \dots, \quad (1.27)$$

que expresado en forma cerrada es

$$T_{total} = \frac{2}{g} \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{2}{g} \frac{1}{1-r}. \quad (1.28)$$

Vemos que la suma de los infinitos períodos de tiempo entre piques da un tiempo finito<sup>2</sup> ( $2/g(1-r)$ ). Este ejemplo convalida la afirmación 8) de la sección previa y nos dará sustento para resolver algunos problemas de control de estructura variable en sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO).

Si bien el resultado previo puede resultarle extraño, en realidad, no lo es. Es el mismo problema que planteaba el filósofo griego Zenon de Elea a sus discípulos cuando les preguntaba quién ganaría la carrera entre Aquiles y una tortuga.

En la paradoja de la carrera entre Aquiles y la tortuga, Aquiles concede a la tortuga una ventaja de  $x$  metros. Una vez iniciada la carrera, Aquiles recorre los primeros  $x$  metros de ventaja, alcanzando el punto de partida de la tortuga en un tiempo finito. Durante este tiempo, la tortuga habrá recorrido una distancia adicional. Luego, Aquiles tardará un poco más de tiempo en recorrer esta distancia, intervalo en el que la tortuga habrá avanzado un poco más, por lo que a Aquiles aún le queda algo más de tiempo para llegar a este tercer punto, mientras la tortuga sigue avanzando. Paradoja: Cómo puede ganar Aquiles la carrera si cada vez que llega a algún lugar donde ha estado la tortuga, todavía tiene algo de distancia que recorrer para alcanzarla.

## 1.4 Sistemas de control por Modos Deslizantes

Los ejemplos previos, a partir de mostrarnos algunos comportamientos propios de los sistemas de estructura variable, ponen en evidencia su mayor versatilidad y, por consiguiente, capacidad para implementar controles más eficientes y robustos.

En particular, a lo largo de este texto estudiaremos una familia de sistemas de estructura variable, los que operan en modos deslizantes. El nombre de modos deslizantes (MD) proviene del hecho que, en este modo de operación, los estados del sistema son forzados a evolucionar (o deslizarse) sobre un subespacio del espacio de estados que denominaremos superficie de

---

<sup>2</sup>Ud podría argumentar que es sólo una abstracción matemática y que no se corresponde con la física real de una pelotita y tendría razón, es una abstracción matemática como la de cualquier modelo que le permite resolver problemas en física, ingeniería, economía, ... Luego, podemos olvidarnos de la pelotita y pensar que simplemente resolvimos un problema que respondía fielmente a las ecuaciones (1.19) y (1.20).

control o de modo deslizante<sup>3</sup>.

En los próximos capítulos veremos cómo diseñar controladores por modos deslizantes que se caracterizan por presentar propiedades imposibles de alcanzar por métodos convencionales de control continuo. Entre otras, robustez a perturbaciones y a incertidumbres en el modelo del sistema, reducción del orden y simplificación extrema en el diseño de controladores para sistemas no lineales complejos.

---

<sup>3</sup>En los ejemplos 2 y 3, la superficie de modo deslizante estaba representada por una recta (un subespacio del plano de estado)



## 2

# CONTROL DE SISTEMAS LINEALES POR MD

## 2.1 Conceptos básicos

El diseño de un control por modos deslizantes (MD) involucra cuatro pasos básicos: el modelado del sistema, la definición de la superficie de control, la selección de una lógica de conmutación y la determinación del control discontinuo para garantizar un rango de trabajo.

- **Modelado del sistema.** El modelo empleado para el diseño de sistemas de control de estructura variable es, en forma casi excluyente, el modelo de estados

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

$$y = h(x), \quad (2.2)$$

donde  $x$  son las variables de estado,  $u$  la acción de control e  $y$  la variable controlada.

Por claridad, en este capítulo nos concentraremos en el control de sistemas lineales donde las funciones  $f(x, u)$  y  $h(x)$  se reducen a una combinación lineal de las variables de estado  $x$  y de la acción de control  $u$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Posteriormente, en el capítulo 9 consideraremos el control por modos deslizantes de sistemas no lineales.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Aún cuando este capítulo está enfocado al análisis y control de sistemas lineales,

- **Superficie de control.** El segundo paso consiste en la determinación de una superficie de control

$$s(x) = 0, \quad (2.4)$$

que contemple las especificaciones de diseño

Es *importante* distinguir entre superficie de control  $s(x) = 0$  y la función de conmutación  $s(x)$ . La función de conmutación está definida de  $R^n$  a  $R$  pudiendo tomar valores positivos y negativos. Cuando  $s(x)$  se iguala a cero, una de las variables de estado pasa a ser dependiente de las otras  $n - 1$  definiendo así un subespacio de dimensión  $n - 1$  que vive en el espacio de estados (dimensión  $n$ ). Este subespacio es la superficie de control. Cuando sea necesario, para evitar posibles confusiones, usaremos la mayúscula para referirnos a la superficie  $s(x) = 0$ . Es decir,  $S(x)$  es el subespacio de estados en el cual la función de conmutación es cero

- $s(x)$  *función de conmutación*
- $\begin{cases} s(x) = 0 \\ S(x) \end{cases}$  *superficie de control.*

- **Lógica de conmutación.** El tercer paso en el diseño de un control por MD es la selección de una lógica de conmutación que asegure que las trayectorias de los estados alcancen la superficie de control  $s(x) = 0$  (Modo Alcance) y que, una vez alcanzada la superficie, garantice la permanencia y evolución de los estados en ella (Modo Deslizante). En términos generales podemos expresar la lógica de conmutación por

$$\begin{aligned} \text{si } s(x) > 0 &\Rightarrow u = u^+ \Rightarrow \dot{x} = f(x, u^+) = f^+ \\ \text{si } s(x) < 0 &\Rightarrow u = u^- \Rightarrow \dot{x} = f(x, u^-) = f^-. \end{aligned} \quad (2.5)$$

- **Determinación del control discontinuo para garantizar un rango de trabajo.** Tanto el MA como el MD propiamente dicho son dependientes de la amplitud del control discontinuo. Luego, para concluir el diseño, los límites  $u^-$  y  $u^+$  deben ser elegidos en función de las especificaciones y la región de trabajo deseada.

---

muchos de los conceptos que veremos en este capítulo también aplican a sistemas no lineales. Luego, en varios desarrollos mantendremos la forma genérica (2.1).

La figura 2.1, esquematiza el comportamiento buscado para el caso de un sistema de segundo orden (dos polos con dinámica muy subamortiguada) con estados  $x = (x_1, x_2)$  y una función de conmutación  $s(x) = r - x_1 - x_2$ . En la parte *a* de la figura se grafican trayectorias en el plano de fase para las excitaciones  $u^+$ ,  $u^-$  y para el caso controlado. Los vectores representan el campo vectorial definido por (2.1), que indica con que velocidad y dirección evolucionan los estados (es decir las trayectorias). En la medida que los estados evolucionan, también lo hace la función de conmutación  $s(x)$ . Esto se indica en la parte *b* de la figura donde se ha graficado la función de conmutación  $s(x)$  como función de los estados  $x_1$  y  $x_2$ . Note que

-el plano horizontal de la figura 2.1*b* es el espacio de estados

-la superficie de control  $s(x) = 0$  es una recta del plano de estados (un subespacio de una dimensión menor) que resulta de la intersección del espacio de estados con el plano que define la función de conmutación  $s(x) = r - x_1 - x_2$

-dada la condición inicial  $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$  considerada,  $s(x(0))$  resulta ser positiva y, de acuerdo a la lógica de conmutación (2.5), se excita al sistema con  $u^+$ . Con esta excitación los estados evolucionan según una trayectoria en el espacio de estados (figura 2.1*a* y plano horizontal en 2.1*b*). Si la lógica de conmutación es adecuada, la trayectoria se aproxima a la superficie  $s(x) = 0$

-en la medida que los estados evolucionan,  $s(x)$  también evoluciona pero la acción de control sólo conmuta cuando  $s(x)$  cambia de signo (en el instante  $t_1$ )

-una vez que la trayectoria alcanza la superficie (recta) de control, el sistema evoluciona sobre ella hasta alcanzar el equilibrio con de una acción de control conmutando a frecuencia elevada.

## 2.2 Modo Alcance

Como podrá imaginar, resulta relevante encontrar las condiciones que deben cumplirse para obtener un comportamiento como el descrito en la figura 2.1. Es decir, las condiciones que garanticen el alcance de la superficie de control y la posterior evolución en ella hasta el equilibrio.

Con este objetivo resulta útil evaluar como evoluciona la función de conmutación  $s(x)$  en el tiempo. En particular, con ayuda del signo de su derivada

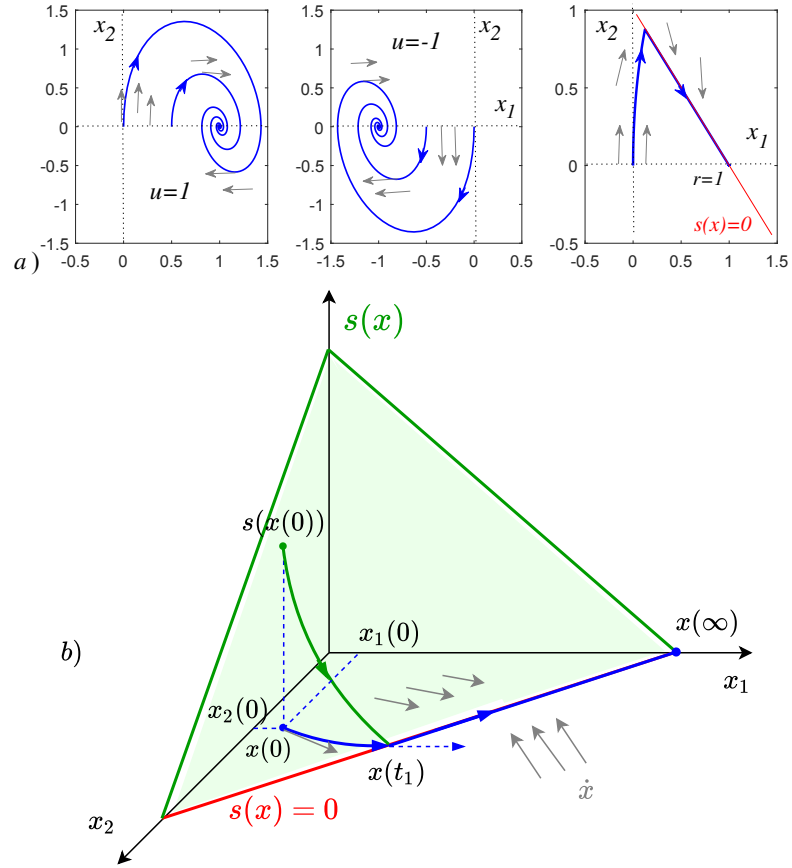


Figure 2.1: a) Trayectorias en el plano de estados para  $u^+$ ,  $u^-$  y para el caso controlado. b) Función de conmutación  $s(x)$  y trayectorias durante el MA y el MD

$$\frac{ds(x)}{dt} = \frac{ds(x)}{dx} \dot{x}, \quad (2.6)$$

podemos verificar si crece o decrece para converger a  $s(x) = 0$ , la superficie de control.

Si  $s(x)$  fuera mayor que cero, esta derivada debería ser negativa para que  $s(x)$  disminuya tendiendo a cero. En el caso contrario, en que  $s(x)$  sea negativa, la derivada (2.6) debería ser positiva. Resumiendo, para alcanzar la superficie es necesario (y también suficiente) que

$$\text{si } s(x) > 0 \Rightarrow \dot{s}(x) < 0, \quad (2.7)$$

$$\text{si } s(x) < 0 \Rightarrow \dot{s}(x) > 0. \quad (2.8)$$

Retomando la ecuación (2.6), podemos expresar la derivada de  $s(x)$  como el producto interno de dos vectores

$$\frac{ds(x)}{dt} = \underbrace{\left[ \frac{ds(x)}{dx_1} \quad \frac{ds(x)}{dx_2} \quad \dots \quad \frac{ds(x)}{dx_n} \right]}_{\nabla s(x)} \dot{x} = \nabla s(x) \cdot \dot{x} = \langle \nabla s(x) \cdot \dot{x} \rangle. \quad (2.9)$$

El primero corresponde al gradiente de la función de conmutación  $s(x)$

$$\nabla s(x), \quad (2.10)$$

es decir, un vector normal a las curvas de nivel de  $s(x)$  y con el sentido en que  $s(x)$  crece más rápidamente. El segundo vector pertenece al campo vectorial

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.11)$$

definido por las ecuaciones de estado del sistema.

Así, podemos reescribir las condiciones (2.7) y (2.8) para alcanzar la superficie de control como

$$\text{si } s(x) > 0 \Rightarrow \dot{s}(x) = \nabla s(x) \cdot f^+ < 0, \quad (2.12)$$

$$\text{si } s(x) < 0 \Rightarrow \dot{s}(x) = \nabla s(x) \cdot f^- > 0. \quad (2.13)$$

donde vemos que la forma de maniobrar el signo de la derivada  $\dot{s}(x)$  es a través de la acción de control  $u$  que afecta a  $\dot{x}$  en (2.5) y, por consiguiente, a (2.12) y (2.13). Si además, estas condiciones se verifican en el entorno de la superficie  $s(x) = 0$ , también quedará garantizado el MD.

Teniendo en cuenta que el signo del producto interno de dos vectores depende de la orientación relativa entre ellos (si las proyecciones de ambos vectores sobre una recta tienen el mismo sentido, el producto es positivo, de lo contrario es negativo) le podemos dar una interpretación geométrica a las condiciones (2.12) y (2.13). La figura 2.2 muestra esta interpretación, donde la superficie  $s(x) = 0$  divide el espacio de estados en dos regiones en

las que la función de conmutación  $s(x)$  presenta signos opuestos. Para cada región se indica la orientación relativa que deberían tener los vectores  $\nabla s(x)$  y  $f$  para garantizar el MA.

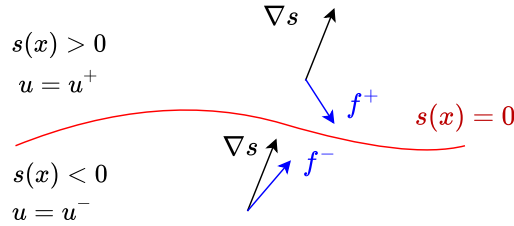


Figure 2.2: Interpretación geométrica de las condiciones del MA (ecuaciones (2.12) y (2.13))

Las condiciones (2.7) y (2.8) pueden resumirse en una única condición

$$s(x)\dot{s}(x) < 0, \quad (2.14)$$

que es necesaria y suficiente para alcanzar la superficie. Posteriormente veremos que para sistemas de múltiples entradas y salidas (MIMO), la condición (2.14) es sólo suficiente.

**Interpretación de la condición (2.14).** Observe que la desigualdad (2.14) puede ser interpretada en el contexto de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Efectivamente, si se elige como función candidata de Lyapunov a

$$V = s^2(x) \quad (2.15)$$

la condición

$$\frac{dV}{dt} = s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad (2.16)$$

garantiza que  $s(x)$  converge a cero.

Debe quedar claro que la condición (2.16) sólo garantiza la convergencia a la superficie de control ( $s(x) = 0$ ) y NO garantiza la estabilidad del sistema bajo operación en MD, ya que la superficie podría corresponder a una

dinámica inestable (Figura 2.3).

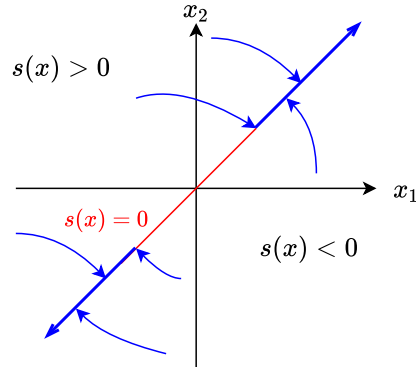


Figure 2.3: Alcance de la superficie y MD con dinámica inestable

## 2.3 Respuesta temporal

La respuesta de un sistema continuo (NO de estructura variable) a una dada excitación y considerando sus condiciones iniciales está dada por la solución de las ecuaciones diferenciales (2.1). En particular, para el caso lineal (2.3) la solución es

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (2.17)$$

siendo

$$\Phi(t) = L^{-1}(sI - A), \quad (2.18)$$

la matriz transición de estados.

En sistemas de estructura variable con tiempo finito entre conmutaciones (es decir, NO MD) la solución (2.17) puede aplicarse a tramos (solución de Caratheodory). Efectivamente, como se indica en la Figura 2.4, la expresión (2.17) se puede emplear para calcular la evolución de los estados desde la condición inicial  $x(t_0)$  hasta el tiempo  $t_1$  en que la trayectoria alcanza la superficie. A partir de  $t_1$ , (2.17) puede volver a aplicarse pero con las ecuaciones de la nueva estructura del sistema y con la “condición inicial”  $x(t_1)$ . Es decir con las nuevas  $A, B$  y  $\Phi(t)$ . Y así sucesivamente.

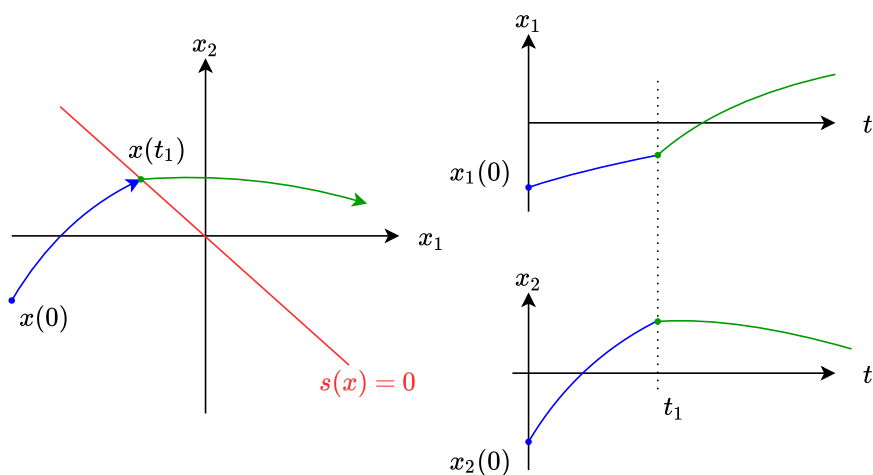


Figure 2.4: Evolución de las variables de estado mediante la solución Caratheodory

En el caso de sistemas operando en MD, la solución a tramos no puede aplicarse debido a que, teóricamente, existen infinitas conmutaciones de períodos infinitamente pequeños. Luego, para encontrar la evolución de los estados durante el MD se necesitan nuevas herramientas matemáticas. Dos son los enfoques más conocidos:

- Método de Filippov
- Método del control equivalente

A continuación, nos detendremos unos instantes para enunciar el método de Filippov dada su importancia conceptual. Posteriormente, en la próxima sección veremos con mayor detalle el segundo método, el del control equivalente, que siendo de muy fácil aplicación, será el que emplearemos a lo largo del texto.

### Método de Filippov

La solución propuesta por Filippov para encontrar la evolución de los estados de un sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

cuando opera en MD sobre una superficie  $s(x) = 0$  se basa en conceptos de regularización. La regularización consiste en evaluar el comportamiento del



sistema reemplazando "las llaves" por no linealidades más suaves con bandas de transición de ancho  $\delta$  entre los valores extremos  $u^-$  y  $u^+$ . Una vez hallada la solución a este problema, se hace tender  $\delta$  a cero (Figura 2.5).

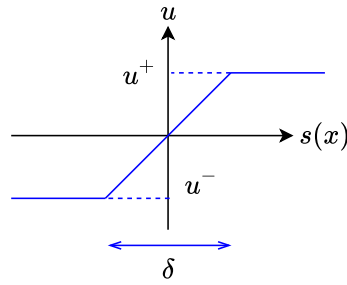


Figure 2.5: Regularización

La conclusión a la que arribó Filippov es la siguiente. El sistema operando en MD, responde al modelo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{MD}(x) \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $f_{MD}(x)$  es un campo vectorial que, sobre la superficie, es tangente a la misma (de otra forma la trayectoria abandonaría la superficie) y pertenece al conjunto convexo definido por

$$\begin{aligned} f^+ &= f(x, u^+) \\ f^- &= f(x, u^-) \end{aligned} \quad (2.21)$$

es decir

$$\dot{x} = f_{MD}(x) = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^- \quad (2.22)$$

donde el coeficiente  $\alpha$  se puede calcular teniendo presente que los vectores  $\nabla s(x)$  y  $f_{MD}(x)$  son normales (Figura 2.6) y que por consiguiente

$$\nabla s(x) f_{MD}(x) = 0, \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \nabla s(x) (\alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-) = 0, \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \alpha \nabla s(x) f^+ + \nabla s(x) f^- - \alpha \nabla s(x) f^- = 0. \quad (2.25)$$

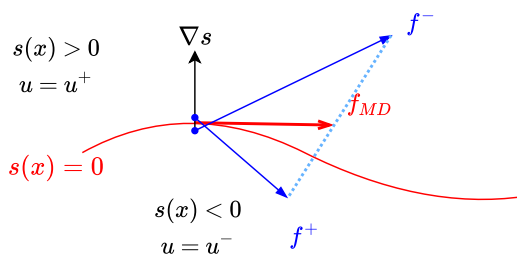


Figure 2.6: Interpretación de Filippov

Luego,

$$\alpha = \frac{\nabla s(x) f^-}{\nabla s(x) (f^- - f^+)} \quad (2.26)$$

$$(1 - \alpha) = \frac{-\nabla s(x) f^+}{\nabla s(x) (f^- - f^+)} . \quad (2.27)$$

**Ejemplo.** Consideremos que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (2.28)$$

es forzado a operar en MD sobre la superficie

$$s(x) = -x_1 - x_2 = 0. \quad (2.29)$$

Empleemos Filippov para calcular la dinámica que muestra el sistema durante este estado de operación.<sup>2</sup>

Considerando que

$$u = 1 \operatorname{sig}(s(x)), \quad (2.30)$$

<sup>2</sup>Si bien este problema puede resolverse fácilmente sin emplear Filippov, su desarrollo permite comprender la mecánica del método que puede ser práctica en problemas de mayor complejidad.

resulta, que

$$si \quad s(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad u = u^+ = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f^+ = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$si \quad s(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad u = u^- = -1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f^- = \begin{bmatrix} x_2 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Luego, reemplazando en (2.26) y (2.27) y considerando que el gradiente  $\nabla s(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$ , calculamos

$$\alpha = \frac{-x_2 + 1}{2} \quad 1 - \alpha = \frac{x_2 + 1}{2}, \quad (2.33)$$

que reemplazados en (2.22), nos permite obtener la dinámica del sistema de estructura variable durante el MD

$$\dot{x} = f_{MD}(x) = \alpha f^+(x, u^+) + (1 - \alpha) f^-(x, u^-), \quad (2.34)$$

$$\dot{x} = f_{MD}(x) = \frac{-x_2 + 1}{2} \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_2 + 1}{2} \begin{bmatrix} x_2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\dot{x} = f_{MD}(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \stackrel{=}{\uparrow} \\ \text{por estar MD,} \\ s(x)=0 \\ \Rightarrow x_2 = -x_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Luego, de acuerdo con Filippov, durante el modo deslizante la dinámica queda definida por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Note que las dos ecuaciones diferenciales que hemos obtenido son linealmente dependientes. En realidad, esto nos está diciendo que el sistema ha perdido un estado y que se comporta como de primer orden durante el MD. Luego, la dinámica de lazo cerrado se reduce a

$$\dot{x}_1 = -x_1 \quad (2.38)$$

con autovalor en  $\lambda = -1$  coincidente con la pendiente de la superficie  $s(x) = 0$  (ecuación (2.29)).

## 2.4 Método del Control Equivalente

El control equivalente es un concepto extremadamente simple que facilita la comprensión de los regímenes deslizantes y, en particular, el diseño de los controladores. El control equivalente  $u_{eq}$  se define como la acción de control continua que tiene el mismo efecto sobre las variables de estado que el que tiene el control discontinuo.

Para determinar el control equivalente emplearemos el *Principio de Invarianza* que dice que, durante el MD, se verifican simultáneamente

$$\begin{aligned} s(x) &= 0 \\ \dot{s}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Mientras que la primera igualdad nos dice que estamos sobre la superficie, la segunda igualdad es la que garantiza que la primera se siga manteniendo en el tiempo.

### 2.4.1 Cálculo del control equivalente en un sistema lineal

Considere un sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_v v \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $B_v v \in R^{n \times 1}$  contempla posibles perturbaciones. También considere una superficie de control que sea una combinación lineal de los estados

$$s(x) = r - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n = r - kx = 0. \quad (2.41)$$

Sabemos que si el sistema opera en MD, tiene que verificarse el principio de invarianza

$$\begin{aligned} s(x) &= 0 \\ \dot{s}(x) &= \dot{r} - k\dot{x} = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde, en particular, nos interesa la segunda condición. Si reemplazamos en ella, la derivada de los estados por las ecuaciones diferenciales del modelo (2.40), obtenemos

$$\dot{s}(x) = \dot{r} - k(Ax + Bu_{eq} + B_v v) = 0. \quad (2.43)$$

Puede notarse que en (2.43) se ha reemplazado  $u$  por el control equivalente  $u_{eq}$ . Esto es posible por la forma en que hemos definido el control equivalente: un control continuo ficticio que, en MD, tiene el mismo efecto que el control conmutado real (es decir, que fuerza a los estados a evolucionar en la superficie)<sup>3</sup>. Luego, el control equivalente puede despejarse de (2.43)

$$u_{eq} = (kB)^{-1}(\dot{r} - kAx - kB_v v), \quad (2.44)$$

observándose que depende tanto de la dinámica original de lazo abierto como de la dinámica que se asigne al lazo cerrado a través de las ganancias  $k_i$  del vector  $k$ .

### 2.4.2 Condiciones para MD

Una **condición necesaria y suficiente** para que exista el MD es

$$u^- < u_{eq} < u^+. \quad (2.45)$$

Esta ecuación tiene la siguiente interpretación gráfica. En la Figura 2.7 se esquematiza una señal conmutada y el control equivalente que producen el mismo efecto sobre un sistema. Es intuitivo (y correcto) pensar que las componentes de menor frecuencia de la señal conmutada coinciden con el control equivalente. Desde otro punto de vista, la señal  $u$  es una implementación (una síntesis) conmutada del control continuo  $u_{eq}$ . Obviamente, no es posible sintetizar ninguna acción de control continua que sea de mayor valor que  $u^+$  o menor que  $u^-$  (ecuación 2.45).

La demostración de (2.45) es inmediata

$$\begin{aligned} \text{si } s(x) > 0 &\Rightarrow \begin{cases} \dot{s}(x) < 0 \\ \dot{s}(x) = \dot{r} - k(Ax + Bu^+ + B_v v) < 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow u^+ > \underbrace{(kB)^{-1}(\dot{r} - kAx - kB_v v)}_{u_{eq}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

---

<sup>3</sup>Note que el control equivalente está definido sólo sobre la superficie de control

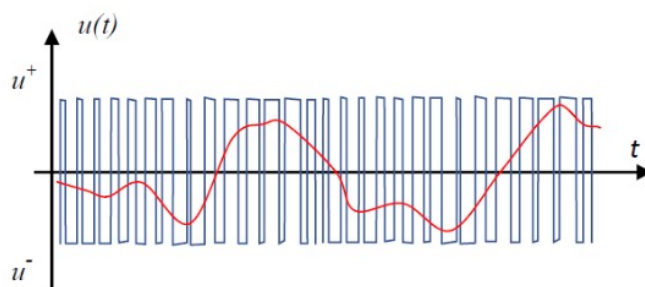


Figure 2.7: Interpretación gráfica del control equivalente

$$\begin{aligned}
 \text{si } s(x) < 0 &\Rightarrow \begin{cases} \dot{s}(x) > 0 \\ \dot{s}(x) = \dot{r} - k(Ax + Bu^- + B_v v) > 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow u^- < \underbrace{(kB)^{-1}(\dot{r} - kAx - kB_v v)}_{u_{eq}}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Luego, a partir de (2.47) y (2.48),

$$u^- < u_{eq} < u^+. \tag{2.48}$$

**Condición de existencia.** Si observamos la ecuación (2.44), vemos que para que el control equivalente sea finito es necesario que  $kB$  sea distinto de cero, luego esto también es necesario para que pueda verificarse (2.45). Así, la condición

$$kB \neq 0, \tag{2.49}$$

conocida como condición de existencia, es condición necesaria para que exista el MD.

**Ejemplo.** Consideremos nuevamente el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

y evaluemos la posibilidad de que pueda operar en MD sobre distintas superficies (Figura 2.8).

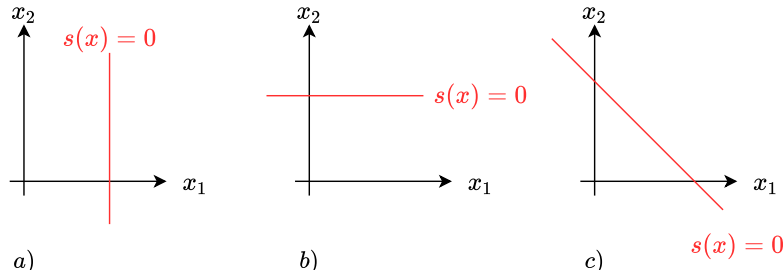


Figure 2.8: Superficies de control

En todos los casos, consideramos que la acción de control discontinua es

$$u = U \operatorname{sig}(s(x)). \quad (2.51)$$

- **Superficie 1**

$$s_1(x) = r - k_1 x_1 = 0 \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0 \quad (2.52)$$

Si verificamos la condición de existencia

$$kB = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

vemos que no es posible que se establezca un MD sobre esta superficie, hecho que ya habíamos visto al analizar el ejemplo 2 del capítulo 1.

- **Superficie 2**

$$s_2(x) = r - k_2 x_2 = 0 \quad \text{con} \quad k_2 \neq 0 \quad (2.54)$$

En este caso, la condición de existencia

$$kB = k_2 \neq 0 \quad (2.55)$$

nos dice que sí es posible la operación en MD sobre esta superficie. Pero dado que ésta es sólo una condición necesaria, para que realmente exista el MD los valores de  $u^-$  y  $u^+$  deben verificar (2.45).

• **Superficie 3**

$$s_3(x) = r - k_1x_1 - k_2x_2 = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} k_1 \neq 0 \\ k_2 \neq 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

donde la condición de existencia

$$kB = k_2 \neq 0 \quad (2.57)$$

dice que también es posible la operación en MD sobre la superficie (2.56). Pero como en el caso anterior los valores de  $u^-$  y  $u^+$  deben verificar (2.45).

**Ejemplo.** Consideremos nuevamente el sistema del ejemplo previo y la superficie

$$s_3(x) = r - k_1x_1 - k_2x_2 = 0. \quad (2.58)$$

Veamos como el concepto del control equivalente puede ser empleado para calcular el rango de la superficie en el cual se establece el MD. Con esta finalidad calculamos el  $u_{eq}$  a partir de las condiciones de invarianza

$$\begin{aligned} s(x) &= 0 \\ \dot{s}(x) &= \dot{r} - k_1\dot{x}_1 - k_2\dot{x}_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde reemplazamos  $\dot{x}_i$  según (2.50)

$$\begin{aligned} s(x) &= 0 \\ \dot{s}(x) &= \dot{r} - k_1x_2 - k_2u_{eq} = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Si consideramos referencias constantes, el  $u_{eq}$  resulta

$$u_{eq} = -\frac{k_1}{k_2}x_2, \quad (2.61)$$

debiendo verificar

$$u^- < -\frac{k_1}{k_2}x_2 < u^+, \quad (2.62)$$

$$-U\frac{k_2}{k_1} < x_2 < U\frac{k_2}{k_1}. \quad (2.63)$$



Luego, el sistema puede operar en MD sólo en los puntos de la superficie en los que  $x_2$  verifica la desigualdad (2.63). A su vez, el rango de  $x_1$  en el cual es posible el MD puede calcularse a partir de despejar  $x_2$  de (2.58) y reemplazarlo en (2.63).

**Note** que

1. El rango de la superficie en que es posible el MD depende de la acción de control disponible, es decir del módulo de  $U$ . El rango de operación se incrementa con el módulo de  $U$ .

2. La pendiente de la superficie es  $-k_1/k_2$  y como ya hemos discutido coincide con el autovalor del sistema operando en MD (y obviamente con la inversa de la constante de tiempo de lazo cerrado). Es decir que, si pedimos mayor velocidad de respuesta, eso implica menor rango de operación en MD sobre la superficie.

La Figura 2.9 muestra las regiones de trabajo sobre tres superficies

•

$$s_{3a}(x) = r - x_1 - x_2 = 0 \quad (2.64)$$

•

$$s_{3b}(x) = r - x_1 - 2x_2 = 0 \quad (2.65)$$

•

$$s_{3c}(x) = r - x_1 - 0,5x_2 = 0 \quad (2.66)$$

## 2.5 Dinámica de MD

En los ejemplos previos hemos considerado sistemas de segundo orden que al operar en MD se comportan como de primer orden. En estos casos, existe una relación directa entre la pendiente de la recta de control y la respuesta temporal. Consideramos ahora, sistemas de mayor orden donde esta visualización no es tan obvia.

### 2.5.1 Ecuaciones de estado del sistema a lazo cerrado

Para obtener el modelo de estados del sistema en MD, simplemente reemplazamos el control  $u$  por el control equivalente

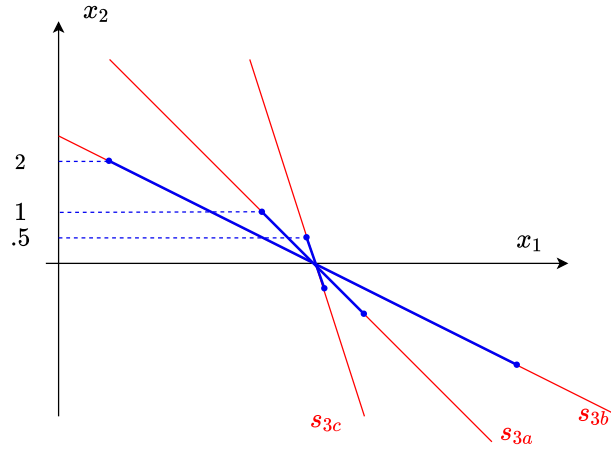


Figure 2.9: Rangos de operación en 3 superficies de control considerando  $U = 1$

$$u_{eq} = (kB)^{-1}(\dot{r} - kAx - kB_vv) \quad (2.67)$$

en las ecuaciones de lazo abierto, resultando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu_{eq} + B_vv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \dot{x} &= Ax + B(kB)^{-1}(\dot{r} - kAx - kB_vv) + B_vv \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Luego, reordenando términos, obtenemos el modelo de lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{(I - B(kB)^{-1}k)A}_{A_{LC}} x + \underbrace{(I - B(kB)^{-1}k)B_v}_{B_{vLC}} v + \underbrace{B(kB)^{-1}}_{B_{\dot{r}}} \dot{r} \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde

$$A_{LC} = (I - B(kB)^{-1}k)A \quad (2.71)$$

$$B_{vLC} = (I - B(kB)^{-1}k)B_v \quad (2.72)$$

$$B_{\dot{r}} = B(kB)^{-1}. \quad (2.73)$$

Por consiguiente, la dinámica durante el MD queda definida por los autovalores de la matriz  $A_{LC}$ , calculados a partir de

$$|\lambda I - A_{LC}| = 0. \quad (2.74)$$

El factor  $(I - B(kB)^{-1}k)$  en (2.71) puede ser visto como un operador que, aplicado a la matriz  $A$  de lazo abierto, permite obtener la matriz  $A_{LC}$ .

**Pregunta.** De la observación de (2.70) y (2.71), surge una aparente inconsistencia con comentarios que hemos hecho previamente. Concretamente, las dimensiones de  $A$  y  $A_{LC}$  parecieran ser las mismas ( $n \times n$ ). Si así fuese, ¿dónde está la reducción del orden del sistema que introduce el MD?

**Otra pregunta.** Si bien en las ecuaciones de lazo cerrado (2.70), aparece la derivada  $\dot{r}$ , no aparece la referencia  $r$ . ¿Está bien esto?

Seguramente ya tiene las respuestas a las dos preguntas. Por consiguiente, sólo nos limitaremos a dar un ejemplo simple que ratifique que sus respuestas son las correctas. Para responder la **primera pregunta**, volvamos a nuestro ejemplo de batalla

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (2.75)$$

con

$$s(x) = r - x_1 - x_2 = 0 \quad (2.76)$$

y calculemos la matriz  $A_{LC}$

$$\begin{aligned} A_{LC} &= (I - B(kB)^{-1}k)A \\ A_{LC} &= \left( I - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Sus autovalores son

$$|\lambda I - A_{LC}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

Si bien, el polinomio  $\lambda^2 + \lambda = 0$  ( ec. (2.78) tiene dos raíces, sólo la raíz en  $\lambda_1 = -1$  corresponde a un polo de lazo cerrado. La segunda ( $\lambda_2 = 0$ ), no tiene significado físico y lo que nos está indicando es que el modelo obtenido está sobredimensionado ya que considera dos estados cuando, en realidad, tiene uno. Efectivamente, en MD, el sistema presenta un comportamiento de primer orden.

Vamos ahora por la **segunda pregunta**: ¿Está bien que no aparezca la referencia  $r$  en la ecuación (2.70)? Considerando el mismo ejemplo, según (2.70), si la referencia es constante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde, en la primera ecuación diferencial debemos tener en cuenta que el sistema está en MD, o sea que  $s(x) = 0$  y por consiguiente  $x_2 = r - x_1$ , resultando

$$\dot{x}_1 = r - x_1. \quad (2.80)$$

Vemos entonces que, en realidad, la ecuación diferencial en  $x_1$ , sí depende de  $r$ . Luego la respuesta a la segunda pregunta era que si bien  $r$  no aparecía explícitamente en (2.70), el estado sí depende de la referencia como es natural. Note que la segunda ecuación es redundante

$$\dot{x}_2 = -x_2 \quad (2.81)$$

y que sólo nos indica que el modelo ha sido sobredimensionado.

### 2.5.2 Solución de las ecuaciones de estado en MD

La evolución temporal de las variables de estado en MD, a partir de la condición inicial correspondiente al punto en que la trayectoria alcanza la superficie, resulta de aplicar la solución clásica de las ecuaciones de estado al modelo (2.70). Solución que se puede encontrar o bien en el dominio del tiempo o bien con la ayuda de la transformada de Laplace. Si empleamos esta última, la respuesta de los estado resulta de antitransformar

$$X(s) = (sI - A_{LC})^{-1}(x(0) + B_{vLC}V(s) + B_r\dot{R}(s)) \quad (2.82)$$

donde  $X(s)$ ,  $V(s)$  y  $\dot{R}(s)$  son las transformadas de Laplace de los estados, de la perturbación y de la derivada de la referencia respectivamente.

Como hemos comentado previamente, si bien pareciera que la respuesta no depende de la referencia  $r$ , en realidad si lo hace ya que las condiciones iniciales  $x(0)$  deben respetar la ecuación de la superficie  $s(x) = r - kx = 0$ .

## 2.6 Diseño del control por MD

### 2.6.1 Asignación de autovalores

Una de las técnicas más populares para el diseño de controladores por MD es la de asignación de autovalores. Esta técnica, consiste en la determinación de las ganancias de la superficie  $s(x) = r - kx = 0$  para que el sistema delazo cerrado presente una dinámica que se ajuste a las especificaciones. Para ver cuan simple es este diseño consideremos primero un sistema donde los estados accesibles son los canónicos controlables. Inmediatamente después, consideraremos el caso general.

#### Asignación de autovalores a partir de un modelo canónico controlable

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u \\ y &= C_c x_c, \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde el subíndice  $c$  es empleado para indicar que los estados son los canónicos controlables. Luego, las matrices  $A_c$  y  $B_c$  tienen la forma

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

siendo el polinomio característico

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_2s^2 + a_1s + a_0, \quad (2.85)$$

cuyas raíces son los autovalores de lazo abierto.

Luego, si se fuerza al sistema a operar en MD sobre una superficie  $s(x) = r - k_c x_c = 0$ , la matriz  $A_{c_{LC}}$

$$A_{c_{LC}} = (I - B_c (k_c B_c)^{-1} k_c) A_c \quad (2.86)$$

resulta

$$A_{c_{LC}} = \left( I - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\left( \begin{bmatrix} k_1^c & \cdots & k_n^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}}_{1/k_n^c} \begin{bmatrix} k_1^c & \cdots & k_n^c \end{bmatrix} \right) A \quad (2.87)$$

$$A_{c_{LC}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ -\frac{k_1^c}{k_n^c} & -\frac{k_2^c}{k_n^c} & \cdots & -\frac{k_{n-1}^c}{k_n^c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$\Rightarrow A_{c_{LC}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -\frac{k_1^c}{k_n^c} & -\frac{k_2^c}{k_n^c} & -\frac{k_{n-1}^c}{k_n^c} & \cdots & -\frac{k_{n-1}^c}{k_n^c} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

**Hermoso!!**

**Se dio cuenta?**

La matriz de lazo cerrado no depende de los valores  $a_i$  propios del sistema de lazo abierto, por consiguiente se puede decir que el control, al menos como lo hemos planteado hasta aquí, es completamente robusto a cambios en dichos parámetros o incertidumbre que tengamos sobre sus valores.

Efectivamente, como  $A_{c_{LC}}$  está en la forma canónica controlable al igual que la matriz de lazo abierto  $A_c$ , el polinomio característico del sistema de lazo cerrado es

$$s \left( s^{n-1} + \frac{k_{n-1}^c}{k_n^c} s^{n-2} + \frac{k_{n-2}^c}{k_n^c} s^{n-3} + \dots + \frac{k_3^c}{k_n^c} s^2 + \frac{k_2^c}{k_n^c} s + \frac{k_1^c}{k_n^c} \right) \quad (2.90)$$

donde

-claramente puede verse que los autovalores de lazo cerrado sólo van a depender de las ganancias  $k_c$  de la superficie. Ganancias que se implementan con amplificadores operacionales o microprocesadores y por consiguiente en forma muy precisa y estable,

-el ‘autovalor’ en cero no tiene significado físico, sólo nos está diciendo que, por estar en MD, el sistema ha perdido un orden.

Desde el punto de vista del diseño, lo más interesante es que, para asignar los  $n-1$  polos de lazo cerrado en los valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ , sólo es necesario igualar los coeficientes del polinomio deseado

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_{n-1}) = s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (2.91)$$

a los coeficientes de (2.90). De esta manera, fácilmente podemos calcular las ganancias que definen la superficie de control.

Note que existen  $n$  ganancias y sólo  $n-1$  autovalores para asignar con los  $n-1$  coeficientes del polinomio característico. Luego tenemos un grado de libertad en la elección de las ganancias de la superficie.

La figura 2.10 muestra el esquema del control por MD. El recuadro en azul representa al sistema a lazo abierto, cuyos estados canónicos controlables son accesibles. La figura pone en evidencia la simplicidad del control que se reduce a un juego de ganancias y a un relé. La figura permite la siguiente interpretación:

1) las señales (internas al sistema de lazo abierto) que aparecen en el punto de suma después del relé son rechazadas por la alta ganancia con que opera el relé durante el MD,

2) el lazo más interno del control se reduce a una ganancia  $-1/k_n$  (también por la alta ganancia que presenta el relé en MD) haciendo que el polo del integrador del estado  $x_n$  se desplace hacia menos infinito. Luego el sistema de lazo cerrado presenta un estado menos, está en la forma canónica controlable y no depende de los valores internos del sistema. De aquí en más, la determinación de la ecuación característica (2.91) resulta inmediata a partir

de álgebra de bloques.

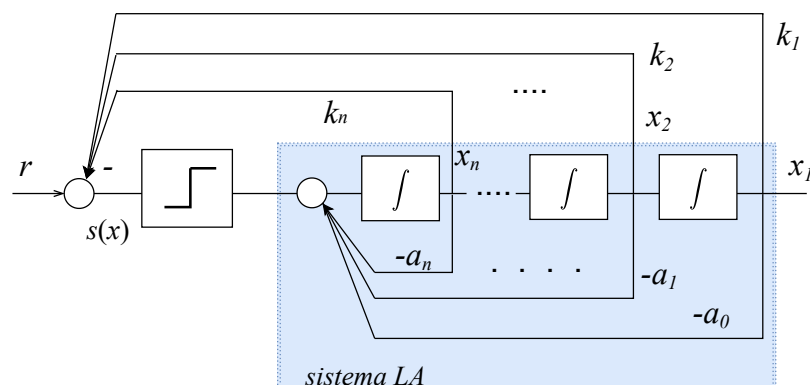


Figure 2.10: Esquema de control por MD

#### *Observaciones adicionales*

-obviamente, el diseño por asignación de autovalores sólo es posible si el sistema presenta la propiedad de controlabilidad,

-al no haber restricciones matemáticas, es posible asignar los autovalores para alcanzar una dinámica de polos dominantes (1 o 2) que nos permitan vincular en forma simple la respuesta temporal (tiempo de establecimiento, de crecimiento, sobrepaso, . . .) con la ubicación de los autovalores,

-si bien no hay restricciones matemáticas para asignar los autovalores, todo sistema impondrá condiciones físicas que restringen la zona en la cual pueden asignarse los autovalores. Pero debe quedar claro que dichas restricciones NO se deben al control por MD, sino que son propias del sistema independientemente de cómo se lo controle.

#### **Diseño de un control por MD por asignación de autovalores a partir de un modelo genérico**

En esta sección, replanteamos el diseño del control por asignación de autovalores, pero ahora para el caso genérico en que los estados accesibles  $x$  NO son necesariamente los canónicos controlables.

Concretamente, nos interesa ver como elegir la superficie

$$s(x) = r - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n = 0 \quad (2.92)$$



para que, al forzar al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2.93)$$

a operar en MD sobre ella, se garantice la dinámica de lazo cerrado deseada. En otras palabras como calcular las ganancias  $k_i$  para asignar los  $n - 1$  autovalores de lazo cerrado. Veamos dos alternativas para hacerlo:

*Alternativa 1.* Sin mucha más dificultad que la que nos permitió calcular  $A_{cLC}$  para el caso de las variables canónicas controlables (ecuación (2.89)), puede calcularse la expresión de la nueva matriz de lazo cerrado dejando cada uno de sus elementos expresado en función de las ganancias  $k_i$ . De igual forma, puede obtenerse el polinomio característico de lazo cerrado

$$s \left( s^{n-1} + \beta_{n-1}(k_i) s^{n-2} + \dots + \beta_3(k_i) s^2 + \beta_2(k_i) s + \beta_1(k_i) \right) \quad (2.94)$$

donde los coeficientes  $\beta_i$  también son funciones de las ganancias  $k_i$ , obviamente diferentes a las que aparecen en el polinomio (2.90). Por último, igualando los coeficientes del polinomio característico de lazo cerrado (2.94) con los del polinomio deseado (2.91), podemos despejar los valores de las ganancias de la superficie. Al igual que en el caso previo, tendremos un grado de libertad para elegir una de las ganancias.

*Alternativa 2.* Otra alternativa para calcular las ganancias de la superficie  $s(x) = 0$ , es transformar el modelo del sistema (2.93) al canónico controlable a partir de una transformación

$$x_c = Tx \quad x = T^{-1}x_c = Px_c, \quad (2.95)$$

resultando

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \underbrace{P^{-1}AP}_{A_c} x_c + \underbrace{P^{-1}B}_{B_c} u \\ y &= \underbrace{CP}_{C_c} x_c \end{aligned} \quad (2.96)$$

y, a partir de este modelo, calcular las ganancias de una superficie

$$s_c(x_c) = r - k_1^c x_{c1} - k_2^c x_{c2} - \dots - k_n^c x_{cn} = 0 \quad (2.97)$$

que serían las necesarias si pudiéramos realimentar los estados canónico controlables  $x_c$ , cosa que no es posible ya que estos estados no están disponibles

para realimentar.

Ahora bien, si aplicamos la transformación inversa de (2.95) en (2.97)

$$s_c(x_c)|_{x_c=Tx} = r - k_c x_c|_{x_c=Tx} = 0, \quad (2.98)$$

obtenemos la superficie que debemos considerar si realimentamos los estados genéricos  $x$

$$s(x) = r - \underbrace{k_c T}_k x = 0. \quad (2.99)$$

Es decir, las ganancias de la superficie buscada pueden calcularse a partir de las ganancias de  $s(x_c) = 0$  y de la transformación  $T$  que vincula las variables  $x$  con  $x_c$

$$k = k_c T. \quad (2.100)$$

La figura 2.11 resume el procedimiento de la segunda alternativa para el cálculo de las ganancias.

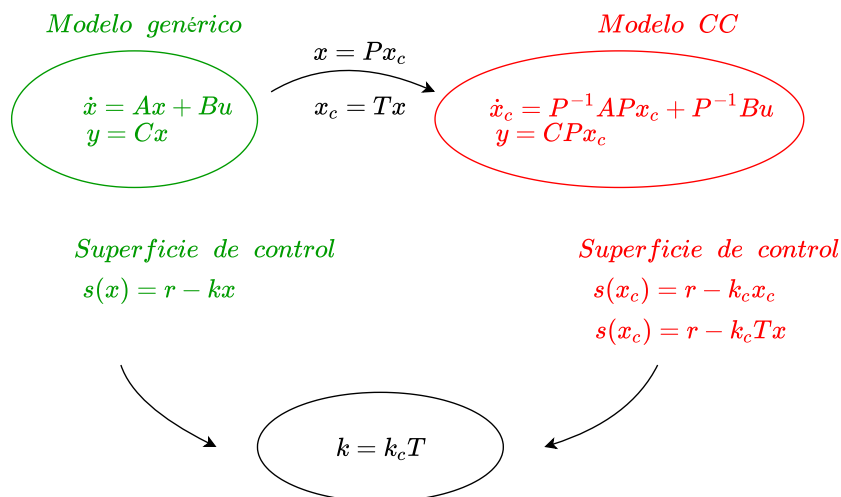


Figure 2.11: Cálculo de las ganancias de  $s(x) = 0$  a partir de un modelo genérico (alternativa 2)

**Ejemplo.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = x_1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (2.101)$$

Nos interesa encontrar las ganancias de la superficie de control

$$s(x) = r - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 = 0 \quad (2.102)$$

que nos permita obtener una dinámica de lazo cerrado definida por los autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + j3 \\ \lambda_2 &= -1 - j3, \end{aligned} \quad (2.103)$$

es decir que el polinomio característico sea

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + 2s + 10. \quad (2.104)$$

Podrá notar que los autovalores elegidos para el lazo cerrado se corresponden con una respuesta muy subamortiguada. Si bien no pareciera la elección más adecuada para un control real, si lo es para visualizar algunas curvas que nos ayuden a comprender mejor el control por MD, que es nuestro objetivo.

Empleamos la primer alternativa para el cálculo de las ganancias de la superficie. Como sabemos que  $A_{LC} = (I - B(kB)^{-1}k)A$ , entonces

$$\begin{aligned} A_{LC} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k_1/k_3 & -k_2/k_3 & 0 \end{bmatrix}}_{(I - B(kB)^{-1}k)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A_{LC} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & (k_2 - k_1)/k_3 & -k_2/k_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.105)$$

y el polinomio característico resulta

$$|sI - A_{LC}| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & (k_1 - k_2)/k_3 & s + (k_2/k_3) \end{bmatrix} = s \left( s^2 + s \underbrace{\left(1 + \frac{k_2}{k_3}\right)}_{\beta_2} + \underbrace{\frac{k_1}{k_3}}_{\beta_1} \right) \quad (2.106)$$

Igualando los polinomios (2.104) y (2.106), y haciendo uso del grado de libertad para la elección de  $k_1 = 1$ , resulta

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 0,1 \\ k_3 &= 0,1 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Las figura 2.12 muestra, en su parte *a*, la evolución de la variable controlada con la dinámica asignada y la función de conmutación que a partir de  $t_1$  se anula indicando el instante en que el sistema opera en MD. La parte *b* de la figura muestra las trayectorias en el espacio de estado (dimensión 3) vistas desde dos ángulos diferentes. Puede observarse que a partir de  $t_1$ , las trayectorias viven en el plano definido por la superficie de control (espacio de dimensión 2).

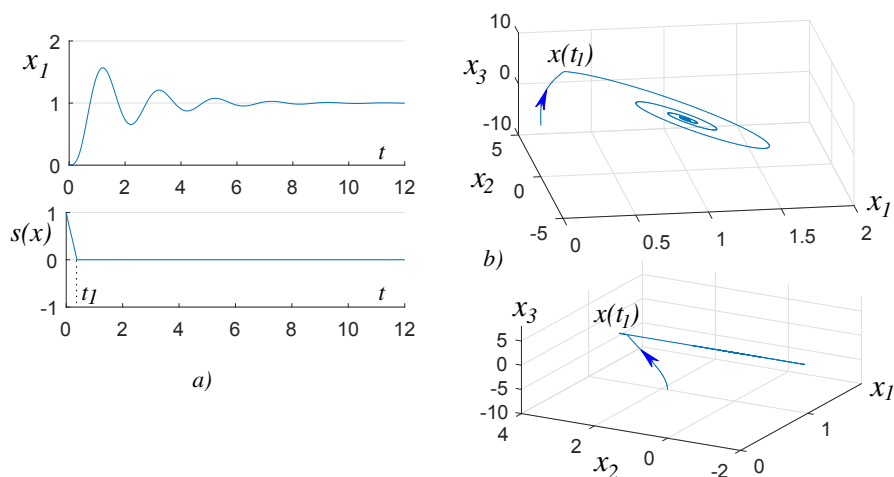


Figure 2.12: a) Variable controlada y función de conmutación. b) Trayectorias en el plano de fase vistas desde dos ángulos distintos

### 2.6.2 Eliminación del error de estado estacionario

El método previo para calcular las ganancias de la superficie, permite asignar la dinámica deseada para el MD. Sin embargo, no garantiza que el error de estado estacionario sea nulo.

En el caso que el sistema de lazo cerrado presentase error de estado estacionario, se lo puede anular procediendo de forma similar a como se lo hace en el caso del control continuo con realimentación convencional de estados. Es decir, expandiendo el sistema de lazo abierto con uno o más estados de forma tal que el lazo abierto presente alta ganancia en el rango de frecuencias de la referencia y de las posibles perturbaciones.

Obviamente, los nuevos estados deben incluirse en la superficie de MD.

Consideremos en detalle el caso de error de estado estacionario a una perturbación constante. A los efectos de rechazar una perturbación cuyo contenido armónico corresponde a frecuencia cero, expandimos el sistema de lazo abierto con un estado integral que presenta ganancia infinita a esa frecuencia. La figura 2.13 muestra la forma correcta de expandir el sistema donde la entrada al integrador debe ser el error que se quiere anular.

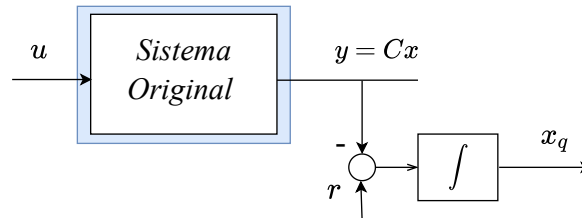


Figure 2.13: Expansión de estados para eliminar errores de estado estacionario constantes

Luego, el modelo del sistema expandido resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x_e \end{aligned} \quad (2.108)$$

que, renombrando las matrices, puede expresarse como

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= A_e x_e + B_e u + B_{ve} v + B_r r \\ y &= C_e x_e\end{aligned}\tag{2.109}$$

donde el subíndice  $e$  corresponde a “expandido”.

En la superficie ahora deben incluirse los  $n + 1$  estados (los  $n$  estados originales más el estado integral)

$$s(x_e) = r - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n - k_q x_q = r - k_e x_e = 0. \tag{2.110}$$

Para calcular las  $n+1$  ganancias que nos permiten asignar la dinámica de lazo cerrado deseada, procedemos como lo hemos hecho previamente calculando el control equivalente a partir de la condición de invarianza

$$\begin{aligned}s(x_e) &= 0 \\ \dot{s}(x_e) &= \dot{r} - k_e \dot{x}_e = \dot{r} - k_e (A_e x_e + B_e u_{eq} + B_{ve} v + B_r r) = 0\end{aligned}\tag{2.111}$$

donde se ha reemplazado  $u$  por  $u_{eq}$ , resultando,

$$u_{eq} = (k_e B_e)^{-1} (\dot{r} - k_e A_e x_e - k_e B_{ve} v - k_e B_r r).\tag{2.112}$$

Vemos que a diferencia al caso previo (sin expansión), aparece explícitamente la referencia  $r$ .

Luego, incorporando la expresión (2.112) del control equivalente  $u_{eq}$  en las ecuaciones de lazo abierto (2.109), se obtiene el modelo de estados del sistema operando en MD

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= A_e x_e + B_e ((k_e B_e)^{-1} (\dot{r} - k_e A_e x_e - k_e B_{ve} v - k_e B_r r)) + B_{ve} v + B_r r \\ y &= C_e x_e\end{aligned}\tag{2.113}$$

donde factorizando términos resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_e = & \underbrace{(I - B_e (k_e B_e)^{-1} k_e) A_e}_{A_{eLC}} x_e + \underbrace{(I - B_e (k_e B_e)^{-1} k_e) B_{ve}}_{B_{veLC}} v + \\ & + \underbrace{(I - B_r (k_e B_r)^{-1} k_e) B_r}_{B_{rLC}} r + \underbrace{B_e (k_e B_e)^{-1}}_{B_{reLC}} \dot{r} \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$y = C_e x_e .$$

En (2.114) podemos identificar las matrices de lazo cerrado

$$\begin{aligned} A_{eLC} &= (I - B_e (k_e B_e)^{-1} k_e) A_e \\ B_{veLC} &= (I - B_e (k_e B_e)^{-1} k_e) B_{ve} \\ B_{rLC} &= (I - B_r (k_e B_r)^{-1} k_e) B_r \\ B_{reLC} &= B_e (k_e B_e)^{-1} . \end{aligned} \quad (2.115)$$

El cálculo de las  $n + 1$  ganancias de la superficie, que no difiere del caso sin expandir, resulta de igualar los coeficientes del polinomio

$$|sI - A_{eLC}| = 0, \quad (2.116)$$

con los del polinomio característico deseado.

La figura 2.14 muestra un esquema en bloques del sistema realimentado.

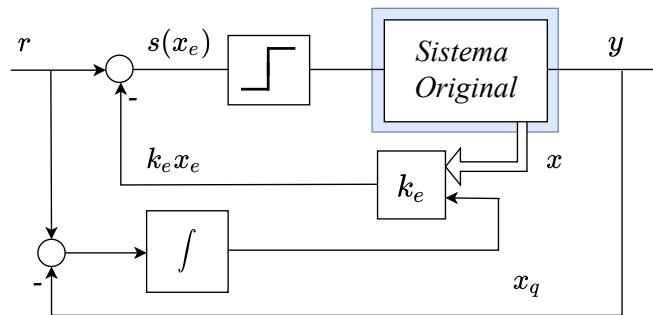


Figure 2.14: Control por MD con rechazo de perturbaciones constantes

**Ejemplo.** Consideramos nuevamente el sistema del ejemplo previo, pero ahora con una perturbación  $v$

$$\begin{aligned} \dot{x} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u \end{cases} & \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = x_1 & \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (2.117)$$

En la figura 2.15 se muestra la respuesta del sistema operando en MD sobre la superficie  $s(x) = r - x_1 - 0,1x_2 - 0,1x_3 = 0$  (ecuación (2.102)) cuando es perturbado en  $t = 10\text{seg}$  con una perturbación constante  $v = 0.1$ . Vemos que, mas allá de que hayamos podido asignar la dinámica de lazo cerrado, el sistema presenta un error de estado estacionario  $e_{ss}$ .

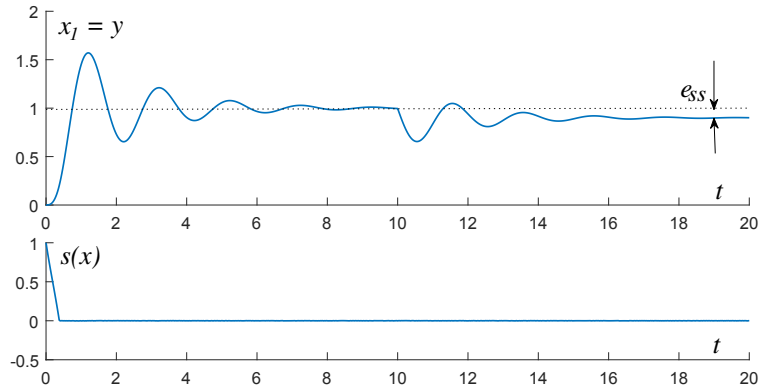


Figure 2.15: Respuesta con error de estado estacionario a la perturbación  $v$  constante

Ante la necesidad de rechazar la perturbación constante  $v$ , expandimos el sistema con un estado integral, resultando el modelo

$$\begin{aligned} x_e \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u \\ \dot{x}_4 = r - x_1 \end{cases} & \quad (2.118) \\ y = x_1 & \end{aligned}$$

que podemos expresar en la forma matricial



$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Luego, la expresión de la matriz de lazo cerrado en función de las ganancias queda

$$\begin{aligned} A_{eLC} &= (I - B_e (k_e B_e)^{-1} k_e) A_e \\ \Rightarrow A_{eLC} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/k_3 & -k_2/k_3 & 1 & -k_q/k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(I - B_e (k_e B_e)^{-1} k_e)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A_{eLC} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k_q/k_3 & (k_2 - k_1)/k_3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Dado que el sistema expandido tiene cuatro estados, el sistema en MD presentará una dinámica de orden 3. Para preservar un comportamiento temporal similar al del ejemplo previo, elegimos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + j3 \\ \lambda_2 &= -1 - j3 \\ \lambda_3 &= -5 \end{aligned} \quad (2.121)$$

siendo el polinomio característico deseado

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s^2 + 2s + 10)(s + 5) = s^3 + 7s^2 + 20s + 50. \quad (2.122)$$

Luego, igualando los coeficientes de los polinomios (2.116) y (2.122) y haciendo uso del grado de libertad para elegir la ganancia  $k_1 = 1$ , resulta

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 1 \\
 k_2 &= 0,3 \\
 k_3 &= 1/20 \\
 k_q &= 2,5 .
 \end{aligned}
 \tag{2.123}$$

La figura 2.16 muestra la respuesta del sistema expandido en MD. Esta respuesta, a mas de presentar una dinámica dominante igual a la del ejemplo previo, no presenta error de estado estacionario.

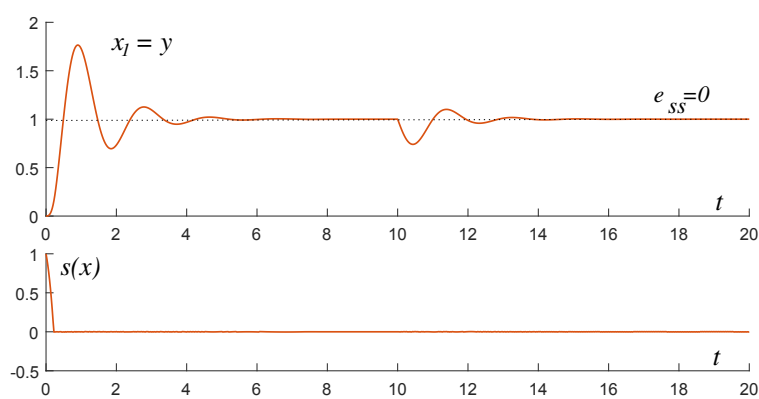


Figure 2.16: Respuesta del sistema expandido y función de conmutación para el caso con perturbación

Las partes *a* y *b* de la figura 2.17 muestran trayectorias en el espacio  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema expandido desde dos ángulos distintos (ambas figuras corresponden a períodos de tiempo previos a la perturbación). Es importante destacar que este espacio  $(x_1, x_2, x_3)$  no es el espacio de estados que es de dimensión cuatro y no podemos graficar. Pero aún así podemos distinguir un punto (A) de quiebre en las trayectorias en el tiempo  $t_1$ . Ese punto corresponde al momento en que la trayectoria que realmente viaja por el espacio de cuatro dimensiones, entra en la superficie de control que ahora es un subespacio de tres dimensiones. A partir de ahí, la trayectoria presenta una dinámica que se agota rápidamente debido al polo no dominante (que se corresponde con la dirección del autovector graficada en la parte *a* de la figura) y termina alcanzando el equilibrio convergiendo al plano de la dinámica de los dos polos complejos conjugados dominantes (este plano es visto como una recta en la parte *b* por la orientación del gráfico). En la parte *c* de la figura, se muestra la trayectoria del sistema perturbado correspondiente a la respuesta temporal de la figura 2.16. Note en la figura 2.17c que, antes de la perturbación, la trayectoria busca el equilibrio en  $y = x_1 = r = 1$  y que

aparecida la perturbación se produce un nuevo transitorio que nuevamente converge a  $y = x_1 = r = 1$ . Es decir, la salida coincide con la referencia mas allá de la perturbación.

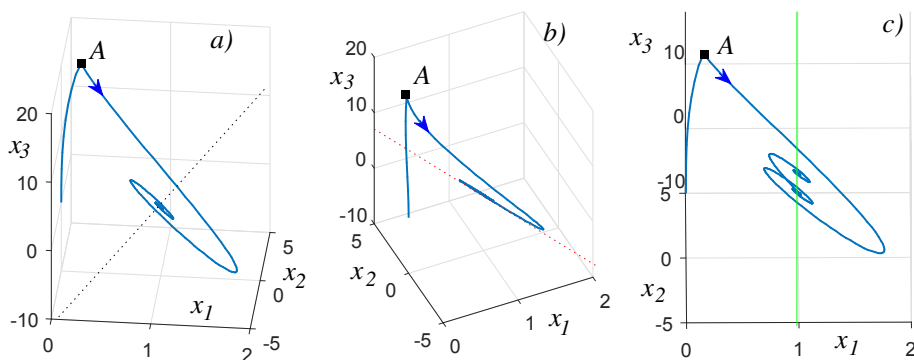


Figure 2.17: a) y b) trayectorias en el espacio  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema expandido de 4 estados desde dos ángulos distintos de observación para el tiempo previo a la perturbación. c) Trayectoria del sistema expandido considerando la perturbación

## 2.7 MD con observadores de estado

Para implementar el control por MD con asignación completa de autovalores se requiere acceder a los estados para su realimentación. Si esto no fuese posible, siempre puede emplearse un observador para aquellos estados que no puedan ser medidos.

La figura 2.18 muestra el esquema de control por MD con observador de estados. Al no estar disponible los estados, la función de conmutación (y por consiguiente, la superficie de MD) se implementa a partir de los estados del observador.

Dependiendo del número de estados medidos y no medidos, puede emplearse un observador de orden completo o un observador de orden reducido. En esta sección, sólo nos explayaremos en el caso del observador de orden completo, la extensión al caso del observador de orden reducido es inmediata y no debería implicarles mayor dificultad.

Consideremos el sistema

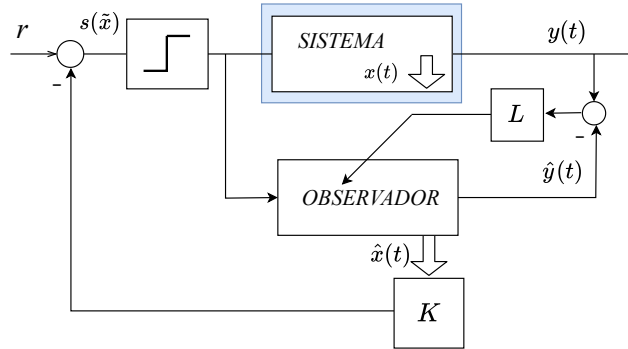


Figure 2.18: Control por MD con observador de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.124)$$

cuyos estados queremos observar.

Para el observador, elegimos la estructura convencional

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + LC(x - \hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (2.125)$$

donde  $L^T = [l_1 l_2 \dots l_n]$  son las ganancias del observador. La diferencia entre los estados del sistema y los del observador definen el error de observación

$$\tilde{x} = x - \hat{x}. \quad (2.126)$$

La dinámica de este error se puede determinar a partir de la resta de las ecuaciones (2.124) y (2.125)

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{(A - LC)}_{A_0} \tilde{x}, \quad (2.127)$$

donde los autovalores de la matriz  $A_0$  (matriz del observador) definen la velocidad con que el error de observación tiende a cero, es decir la velocidad con que los estados del observador convergen a los valores de los estados reales. Si el sistema es completamente observable, no existen restricciones matemáticas para asignar estos autovalores a partir de la correcta elección

de las ganancias  $l_i$ .

Para representar el conjunto sistema más observador, ahora se necesitan las  $2n$  estados y sus correspondientes ecuaciones diferenciales. Como estados del observador, podemos elegir indistintamente las variables  $\hat{x}$  o los errores de observación  $\tilde{x}$ . Si elegimos  $\tilde{x}$ , el modelo es

$$\dot{x}_{s+o} = \begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{\tilde{x}} = \underbrace{(A - LC)}_{A_o} \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

que puede expresarse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.129)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}.$$

Como muestra la figura 2.18, ante la imposibilidad de acceder a los estados del sistema, la superficie se implementa a partir de los estados del observador

$$s(\hat{x}) = r - k\hat{x} = 0, \quad (2.130)$$

que podemos expresar como

$$s(\hat{x}) = r - k(x - \tilde{x}) = 0, \quad (2.131)$$

viendo que

$$s\hat{i} \quad \tilde{x} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad s(\hat{x}) \rightarrow s(x). \quad (2.132)$$

Si esta convergencia es rápida en comparación con la dinámica definida por la superficie de control  $s(x) = 0$ , desde el punto de vista práctico, el sistema en MD con observador no mostrará mayores diferencias con respecto al caso en que se realimentan las variables reales.

**Control equivalente para el MD con observador.** Como lo hemos hecho previamente, para el cálculo del control equivalente nos valemos de las condiciones de invarianza, en particular de

$$\begin{aligned}
\dot{s}(\hat{x}) &= \dot{r} - k\dot{\hat{x}} = 0 \\
\dot{s}(\hat{x}) &= \dot{r} - k(\dot{x} - \dot{\tilde{x}}) = 0 \\
\dot{s}(\hat{x}) &= \dot{r} - k(Ax + Bu_{eq} - A_o\tilde{x}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.133}$$

Luego, el control equivalente resulta

$$\begin{aligned}
u_{eq} &= (kB)^{-1}(\dot{r} - kAx - kA_o\tilde{x}) \\
u_{eq} &= \underbrace{(kB)^{-1}(\dot{r} - kAx)}_{\substack{\text{se corresponde} \\ \text{con el } u_{eq} \text{ de la superficie} \\ \text{con los estados reales}}} - (kB)^{-1}kA_o\tilde{x}
\end{aligned} \tag{2.134}$$

donde podemos ver que si  $\tilde{x} \rightarrow 0$ , el control equivalente tiende al valor que se requeriría si se pudiera implementar la superficie con los estados reales.

**Dinámica en MD.** Reemplazando (2.134) en las ecuaciones de lazo abierto obtenemos las ecuaciones diferenciales que definen la dinámica a lazo cerrado

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu_{eq} \\ \dot{\tilde{x}} = A_o\tilde{x} \end{cases} \tag{2.135}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{(I - B(kB)^{-1}k)A}_{A^*} x + B(kB)^{-1}kA_o\tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} = A_o\tilde{x} \end{cases} \tag{2.136}$$

donde también vemos que si  $\tilde{x} \rightarrow 0$ , la dinámica se corresponde con la del caso en que se realimentan los estados reales.

**Principio de separación.** Es natural preguntarse cómo afecta la presencia del observador al cálculo de las ganancias de la superficie. Escribiendo las ecuaciones previas en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - B(kB)^{-1}k)A & B(kB)^{-1}kA_o \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \tag{2.137}$$

ponemos en forma explícita la matriz de lazo cerrado del sistema completo, cuyos autovalores se calculan a partir del polinomio

$$\left| sI - \begin{bmatrix} (I - B(kB)^{-1}k)A & B(kB)^{-1}kA_o \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \right| = 0 \tag{2.138}$$

$$\Rightarrow \left| sI - (I - B(kB)^{-1}k)A \right| \cdot |sI - A_o| = 0. \quad (2.139)$$

Vemos en (2.139) que los autovalores de lazo cerrado corresponden a las raíces de los polinomios definidos por cada uno de los determinantes, siendo las raíces del primero coincidentes con las raíces del lazo cerrado que se obtendrían realimentando los estados reales, mientras que las raíces del segundo determinante corresponden a los autovalores del observador (que se asignan para que el error de observación converja rápidamente a cero). Este resultado nos indica que el cálculo de las ganancias de la superficie (que determinan los autovalores de lazo cerrado) es independiente del diseño del observador. Este hecho se conoce como principio de separación y simplifica en grado extremo el diseño del control con observadores.

**Nota.** Hemos visto cómo puede emplearse un observador para implementar un control por MD cuando los estados no son accesibles. El observador que hemos considerado es un observador lineal clásico. En el próximo capítulo veremos cómo podemos implementar el observador con MD.





# 3

## DOMINIO DEL MD

### 3.1 Introducción

En ejemplos previos hemos visto (en algunos casos, sólo intuitivo) que las condiciones para que un sistema opere en MD dependen, entre otros factores, de

- la dinámica del sistema
- de la superficie
- de los valores límites de la acción de control
- de las señales externas (referencia y perturbaciones).

En este capítulo evaluaremos más cuidadosamente esta dependencia tratando de responder, entre otras, a las siguientes preguntas:

- ¿En qué dominio de una superficie se puede establecer el MD?
- Una vez establecido el MD, ¿se mantendrá hasta alcanzar el equilibrio?

Retomemos un par de ejemplos, pero ahora para comprender la importancia de responder estas preguntas.

**Ejemplo.** Consideremos nuevamente el sistema con dos integradores

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{3.1}$$

y la superficie de control

$$s(x) = r - x_1 - kx_2 = 0, \quad (3.2)$$

con  $r$  constante.

Resulta inmediato calcular el  $u_{eq}$  a partir de las condiciones de invarianza

$$u_{eq} = -\frac{1}{k}x_2, \quad (3.3)$$

debiendo verificarse que

$$u^- < u_{eq} = -\frac{1}{k}x_2 < u^+, \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow -u^+k < x_2 < -u^-k. \quad (3.5)$$

Luego, el sistema puede operar en MD sólo en los puntos de la superficie en los que  $x_2$  verifica la desigualdad (3.5). A su vez, el rango de  $x_1$  en el cual es posible el MD puede calcularse a partir de despejar  $x_2$  de (3.2) y reemplazarlo en (3.5)

$$u^-k^2 + r < x_1 < u^+k^2 + r. \quad (3.6)$$

Mientras el sistema opera en MD,

$$\dot{x}_1 = x_2 = \frac{r}{k} - \frac{x_1}{k}, \quad (3.7)$$

luego, la evolución temporal de las señales  $x_1$ ,  $x_2$  y  $u_{eq}$ , a partir del instante  $t_1$  en que la trayectoria alcanza la superficie, es

$$x_1(t) = r + (x_1(t_1) - r)e^{-t/k} \quad (3.8)$$

$$x_2(t) = x_2(t_1)e^{-t/k} \quad (3.9)$$

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{k}u_{eq}(t_1)e^{-t/k}. \quad (3.10)$$

La figura 3.1 muestra, para  $r = 1$ ,  $u^+ = -u^- = 1.5$  y  $k = 1$ , una trayectoria en el plano de fase y la evolución temporal de las variables de estado y del control equivalente una vez establecido el MD. Obviamente, el control equivalente  $u_{eq}(t_1)$  en el punto  $A$  verifica la desigualdad (3.4). Como

se desprende de la ecuación (3.10), en la figura también se observa que  $u_{eq}$  converge a cero con la constante de tiempo que impone el MD ( $\tau = k$ ). Luego, si la condición (3.4) se verificaba al entrar en la superficie, se seguirá verificando  $\forall t > t_1$ . Podemos concluir que, para este caso particular, una vez establecido el MD se mantiene hasta alcanzar el equilibrio (por el momento no estamos considerando perturbaciones).

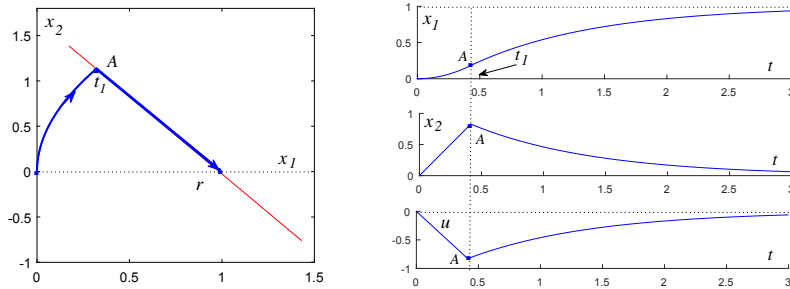


Figure 3.1: Rango de operación en MD y variables  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $u(t)$  ( $u(t) = u_{eq}(t)$  a partir de  $t_1$ )

Si, en vez del sistema (3.1) con dos polos en el origen, hubiésemos considerado un sistema con dos polos reales, el control equivalente de estado estacionario habría sido distinto de cero pero su evolución desde el valor inicial  $u_{eq}(0)$  al valor de estado estacionario  $u_{eq}(\infty)$  habría sido una exponencial de constante de tiempo  $k$  (es decir monótonamente creciente o decreciente). Luego, si  $u_{eq}(0)$  y  $u_{eq}(\infty)$  cumplían la desigualdad (3.4)<sup>1</sup>, también la cumple toda la evolución del control equivalente

$$u_{eq}(t) = u_{eq}(\infty) + (u_{eq}(0) - u_{eq}(\infty))e^{-t/k}. \quad (3.11)$$

Podemos concluir que también en este caso, el MD se mantendrá en forma ininterrumpida hasta alcanzar el equilibrio.

### Ejemplo.

Retomemos ahora el sistema

<sup>1</sup>de no ser así el sistema estaría mal dimensionado, independientemente de como se lo controle

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.12)$$

$$y = x_1 \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x .$$

En el capítulo previo calculamos las ganancias

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 0,1 \\ k_3 &= 0,1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

de la superficie de control

$$s(x) = r - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 = 0 \quad (3.14)$$

para asignar los autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + j3 \\ \lambda_2 &= -1 - j3, \end{aligned} \quad (3.15)$$

durante el MD.

En la figura 3.2 se muestra la evolución del control equivalente cuando se aplica una referencia  $r = 1$ . En la parte *a* de la figura se muestra el caso en que una vez que el sistema comienza a operar en MD ( $t = 0$ ) el control equivalente se mantiene dentro de los límites disponibles hasta alcanzar el equilibrio. Sin embargo, podemos intuir que, dependiendo de los valores  $u^-$  y  $u^+$ , puede darse el caso que el  $u_{eq}(t)$  sobrepase alguno de estos valores límites (punto *B* en la figura 3.2b, interrumpiéndose el modo deslizante).

La figura 3.3 muestra las trayectorias en el espacio de fase para distintos valores de  $u_{lim}$ . La parte *a* de la figura corresponde al caso en que los valores extremos de la acción de control permiten sintetizar el control equivalente durante todo el transitorio, por consiguiente una vez que se alcanza la superficie, los estados viven en ella hasta alcanzar el estado de equilibrio. La parte *b* de la figura muestra el caso en que la acción de control disponible no permite sintetizar el control equivalente durante todo el transitorio. Cuando el control equivalente supera  $u_{lim}$ , la trayectoria se escapa de la superficie y posteriormente, las condiciones permiten que el sistema vuelva a operar

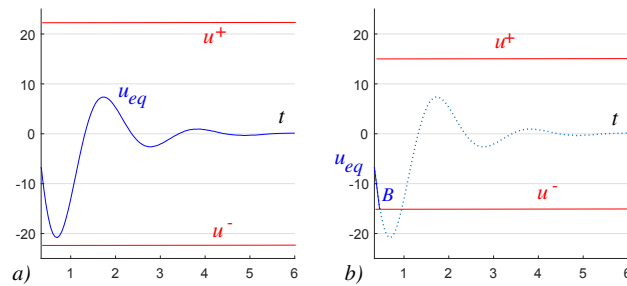


Figure 3.2: Evolución de  $u_{eq}(t)$ : a) dentro de los límites disponibles y b) excediendo uno de los límites

en MD hasta alcanzar el estado estacionario. Por último en la parte *c* de la figura, se muestra un caso extremo en el que el sistema entra y sale del MD en reiteradas oportunidades.

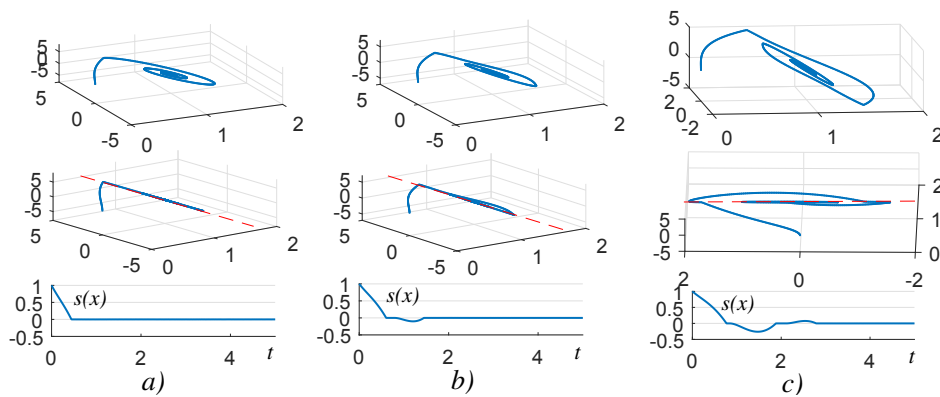


Figure 3.3: Trayectorias en el plano de estado para distintos valores de  $u_{lim}$ . a) MD ininterrumpido. b) y c) MD interrumpido

El ejemplo nos permite concluir que mas allá de la región de la superficie en la cual están dadas las condiciones para operar en MD (rango de operación en MD), es importante determinar la subregión en la cual el MD se produce sin interrupciones, subregión que llamaremos rango restringido.

### 3.2 Rango de operación en MD

En esta sección calcularemos la región de la superficie en la cual es posible el MD. Posteriormente, en la sección 3.3 encontraremos las expresiones del

rango restringido de la superficie.

Cuando el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_v v \quad (3.16)$$

entra en MD sobre la superficie

$$s(x) = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = r - k_a x_a - k_n x_n = 0, \quad (3.17)$$

una de sus variables (digamos  $x_n$ ) pasa a ser dependiente de las otras  $n - 1$  variables que, en (3.17), hemos agrupado en un vector  $x_a = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n-1}]^T$ . Luego, durante el MD

$$x_n = \frac{1}{k_n} r - \frac{k_a}{k_n} x_a. \quad (3.18)$$

y las  $n$  variables originales pueden expresarse en términos de las variables independientes  $x_a$

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ -k_a/k_n \end{bmatrix}_{n \times (n-1)} x_a + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1/k_n \end{bmatrix} r. \quad (3.19)$$

Ahora bien, para que las trayectorias se mantengan en la superficie, el control equivalente tiene que poder sintetizarse con los valores  $u^-$  y  $u^+$ . Luego, para determinar la región en la que es posible el MD podemos plantear la segunda condición de invarianza

$$\dot{s}(x) = \dot{r} - k\dot{x} = \dot{r} - k(Ax + Bu_{eq} + B_v v) = 0, \quad (3.20)$$

donde podemos reemplazar  $x$  en función de los estados  $x_a$  (ecuación (3.19)) ya que estamos en la superficie

$$\dot{s}(x) = -k \left( A \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ -k_a/k_n \end{bmatrix}_{n \times (n-1)} x_a + A \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1/k_n \end{bmatrix} r + Bu_{eq} + B_v v \right) = 0. \quad (3.21)$$

Reemplazando  $u_{eq}$  por  $u_{lim} = [u^-, u^+]$  y agrupando términos en (3.21), encontramos que

$$\underbrace{-kA \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ -k_a/k_n \end{bmatrix}}_{f} x_a \underbrace{-kA \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1/k_n \end{bmatrix} r - kB u_{lim} - kB_v v}_{g} = 0, \quad (3.22)$$

expresión que es de la forma

$$f x_a + g = 0, \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_{n-1} \end{bmatrix} x_a + g = 0. \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) nos dice que los límites que definen la región de la superficie en la que es posible el MD, son dos "superficies" lineales de una dimensión menos que la superficie de control (es decir,  $n - 2$ ). Así, sobre estos límites,  $x_{n-1}$  puede expresarse como

$$x_{n-1} = h(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}). \quad (3.25)$$

**Ejemplo.** Consideremos el control de un servomecanismo de posición (motor DC)

$$\begin{cases} \dot{i} = \frac{1}{L} (u - iR - k_\varphi \omega) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J} (k_\varphi i - v) \\ \dot{\theta} = \frac{1}{T_\theta} \omega \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_a & -k_\varphi/RT_a & 0 \\ k_\varphi/T_m & 0 & 0 \\ 0 & 1/T_\theta & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/RT_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/T_m \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (3.27)$$

con

$$\begin{aligned}
T_a &= 0,05 \\
T_\theta &= 2 \\
T_m &= 0,5 \\
k_\varphi &= 1
\end{aligned} \tag{3.28}$$

sobre la superficie

$$s(x) = r - kx = r - k_i i - k_\omega \omega - k_\theta \theta = 0, \tag{3.29}$$

donde las ganancias se eligen para asignar los autovalores en

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\rho + j\rho \\ \lambda_2 &= -\rho - j\rho \end{aligned} \right\} s^2 + 2\rho s + \rho^2, \tag{3.30}$$

resultando:

$$\begin{aligned}
k_i &= 1/2\rho^2 T_m T_\theta \\
k_\omega &= 1/\rho T_\theta \\
k_\theta &= 1.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Con la ayuda de (3.22) podemos calcular el rango de operación de  $s(x) = 0$  en que es posible el MD quedando determinado por

$$f x_a + g = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + g = 0 \tag{3.32}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2\rho T_a - 1)r}_{f_1} i + \underbrace{(2\rho^2 R T_m T_\theta - 1)}_{f_2} \omega + \underbrace{u_{\text{lim}} - 2\rho R T_a v}_{g} = 0. \tag{3.33}$$

Es decir, los límites del rango de operación en  $s(x) = 0$  están dados por 2 rectas.

Vemos que el sistema era de orden tres, es decir que sus estados vivían originalmente en un espacio tridimensional. Sin embargo, al controlarlo con un régimen deslizante, lo forzamos a evolucionar en un subespacio de orden dos. Sin embargo, al disponer de un límite en la acción de control, no todos los puntos de esa superficie son posibles para operar en MD. El rango de operación en la superficie queda restringido a la región limitada por dos rectas  $i = f(\omega)$  (dos subespacios de orden  $n - 2 = 1$  que resultan de reemplazar



$u_{lim}$  por  $u^-$  y  $u^+$ ).

La tercer variable  $\theta$  para cada uno de los puntos de las rectas (3.33) puede despejarse de la superficie, resultando

$$\theta = r - \frac{1}{2\rho^2 T_m T_\theta} i - \frac{1}{\rho T_\theta} \omega. \quad (3.34)$$

En la figura 3.4a se muestra el espacio de estados, la superficie de control y las rectas que definen los límites de la región del MD. Una vez que se establece el MD, las trayectorias viven en el plano definido por las variables independientes  $(i, \omega)$ . La figura 3.4b muestra la proyección de las rectas límites de la figura 3.4a en este plano  $(i, \omega)$  (rectas (3.33)). Para los puntos  $(i, \omega)$  de la zona sombreada de la figura 3.4b habrá modo deslizante sobre la superficie de la figura 3.4a

La figura 3.5 muestra en forma comparativa las regiones de operación en MD para el ejemplo del servomotor para tres valores de  $\rho$  (20, 40 y 60) en (3.30). Como se desprende de (3.33) el rango depende tanto de los valores del sistema de lazo abierto como de la asignación de autovalores de lazo cerrado. En la medida que se exige más velocidad de respuesta al lazo cerrado, el rango del MD se hace más estrecho.

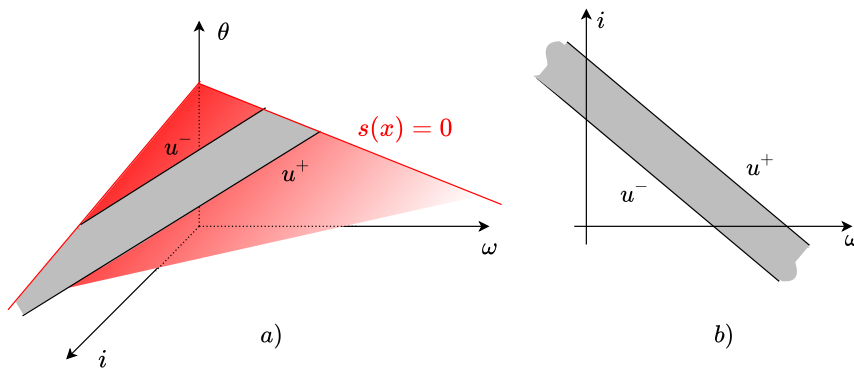


Figure 3.4: a) Límites del rango de  $s(x) = 0$  para operación en MD en el espacio de estados  $(\omega, i, \theta)$ . b) Proyección de los límites en el espacio  $(\omega, i)$

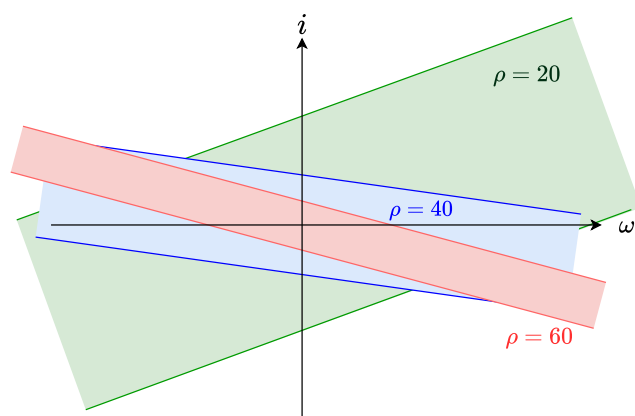


Figure 3.5: Gráfico comparativo que muestra la influencia de la asignación de los autovalores sobre el rango de operación en MD.  $\rho=20, 40$  y  $60$

### 3.3 Rango restringido

La figura 3.6 muestra, en un contexto similar al del ejemplo anterior, como serían las trayectorias en MD para distintas condiciones iniciales. Vemos que, mientras la trayectoria que se inicia en el punto  $A$  evoluciona siempre entre las dos rectas que definen la región de MD, la iniciada en  $C$  sale de la región en el punto  $C_1$  (es decir, el MD se interrumpe). Si la superficie es nuevamente alcanzada en un punto como el  $C_2$ , el MD se reestablecerá. Obviamente, desde el punto de vista práctico, es importante determinar, cuál subregión de condiciones iniciales permite alcanzar el equilibrio sin salir del MD. Gráficamente resulta fácil imaginarse cual es esta región. Como muestra la figura 3.6, a más de las rectas (3.33), esta subregión está limitada por las curvas  $BB_1$  y  $B'B'_1$ , es decir por tramos de dos trayectorias que son tangentes a las rectas límites en los puntos  $B_1$  y  $B'_1$ .

Ha sido fácil imaginarnos cuál es el rango restringido a partir del gráfico. Pero a los efectos de nuestro estudio, es más apropiado calcularlo. **¿Cómo lo haría?**

**Respuesta:** como se indica en la figura 3.7, en la medida en que la trayectoria que se inicia en  $B$  se aproxima a  $B_1$ , lo hace con una mayor demanda de control equivalente (va cruzando rectas de  $u_{eq} = \text{constante}$  de mayor valor). Cuando la trayectoria llega al punto  $B_1$ ,  $u_{eq}$  ha crecido hasta  $u^+$  para luego empezar a decrecer. Es decir,  $u_{eq}$  tiene un máximo cuando la trayectoria pasa por el punto  $B'$ , máximo que podemos encontrar igualando a cero su derivada. De igual forma podemos concluir que  $u_{eq}$  presenta un mínimo en  $B'_1$  para la trayectoria que pasa por este punto.

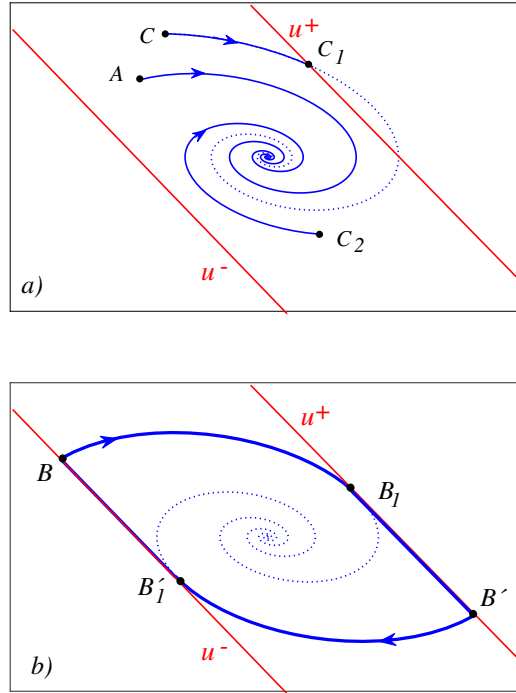


Figure 3.6: Rango restringido de operación en MD

Luego, para determinar los puntos  $B_1$  y  $B'_1$  calculamos

$$u_{eq} = (kB)^{-1} (\dot{r} - kAx + kB_v v) \quad (3.35)$$

e igualamos su derivada a cero

$$\dot{u}_{eq} = (kB)^{-1} (-kA\dot{x}) = -(kB)^{-1} (kA(Ax + Bu_{lim} + B_v v)) = 0 \quad (3.36)$$

donde, por estar sobre la superficie

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ -k_a/k_n \end{bmatrix}_{n \times (n-1)} x_a + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1/k_n \end{bmatrix} r. \quad (3.37)$$

Pero también es importante tener en cuenta que, de los puntos de la superficie sólo nos interesa evaluar los que están sobre los límites, luego

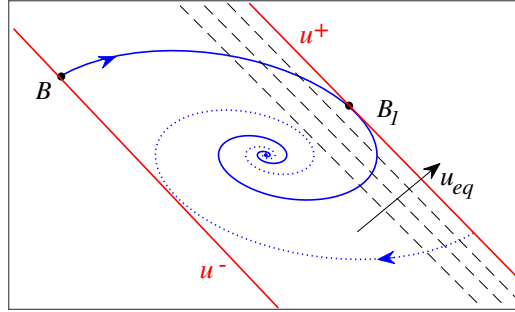


Figure 3.7: Determinación del rango restringido de la operación en MD

las variables  $x_a$  pueden ponerse en función de los primeros  $n - 2$  estados. Efectivamente:

$$\begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_{n-1} \end{bmatrix} x_a + g = 0 \quad (3.38)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + g = 0 \quad (3.39)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_b & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + g = 0 \quad (3.40)$$

$$\Rightarrow x_{n-1} = \frac{1}{f_{n-1}} g - \frac{f_b}{f_{n-1}} x_b \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow x_a = \begin{bmatrix} x_b \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-2} \\ -f_b/f_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-2)} x_b + \begin{bmatrix} 0_2 \\ 1/f_{n-1} \end{bmatrix} g. \quad (3.42)$$

Reemplazando en (3.38), se obtiene:

$$h x_b + m = 0. \quad (3.43)$$

La ecuación (3.43) corresponde a un espacio de una dimensión menor que la de los límites de la región de MD, es decir  $n - 3$ . En el caso del ejemplo del servomotor, éste espacio es sólo un punto (en realidad un punto para cada  $u_{lim}$ ). Una vez calculados los puntos  $B_1$  y  $B'_1$ , los tramos de trayectoria  $BB_1$  y  $B'B'_1$  pueden calcularse a partir de la solución general de las ecuaciones de estado

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (3.44)$$

considerando tiempos negativos y las condiciones iniciales correspondientes a los puntos  $B_1$  y  $B'_1$ .

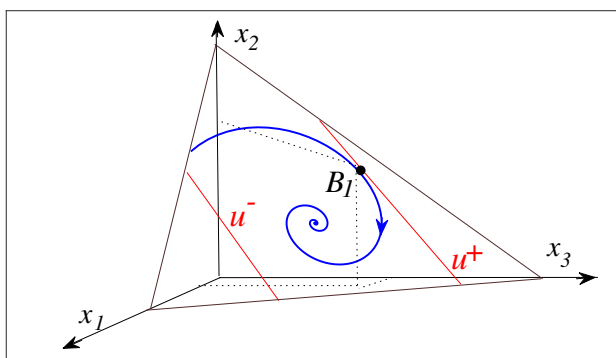


Figure 3.8: Espacio de estados, superficie de control y límites de operación en MD

### Ejemplo.

Calculamos los puntos  $B_1$  y  $B'_1$  que permiten determinar el rango restringido para el ejemplo del servomecanismo (3.26). Para esto, reemplazamos los valores del ejemplo en (3.43), resultando

$$\underbrace{1,875}_{h} i + \underbrace{50 u_{lim} - 2,875v}_{m} = 0. \quad (3.45)$$

Luego, los puntos  $B_1$  y  $B'_1$  corresponden a las corrientes

$$\left. \begin{array}{l} u_{\text{lim}} = \pm 1,2 \\ v = 0 \end{array} \right\} i = \pm 32 . \quad (3.46)$$

La variable velocidad la despejamos de

$$f x_a + g = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm 1,2 \quad (3.47)$$

y la posición, de la superficie de control

$$s(x) = r - k_i i - k_\omega \omega - k_\theta \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm 0,005. \quad (3.48)$$

## 4

# MODO DESLIZANTE REAL

### 4.1 Introducción

En los capítulos previos hemos supuesto que la frecuencia de conmutación es teóricamente infinita. Obviamente, esto no es físicamente posible y, en realidad, los estados no van a vivir exactamente en la superficie sino en un entorno de ella. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, lo importante es que la frecuencia de conmutación sea alta con respecto a las propias del sistema que se quiere controlar. Si la frecuencia de conmutación es mucho mayor a las del sistema, nos será muy difícil encontrar diferencias entre el control teórico y el control real del sistema.

En algunos trabajos, para diferenciar la etapa del diseño de la etapa de la implementación se hace referencia a Modos Deslizantes Ideales y Modos Deslizantes Reales. En este capítulo haremos referencia a algunos aspectos prácticos a tener en cuenta en la elección de la frecuencia de conmutación.

### 4.2 Frecuencia de conmutación finita

Al momento de implementar el control, los dispositivos de conmutación estarán sujetos a restricciones físicas que habrá que respetar. Una de ellas es la referida a la máxima frecuencia con que pueden conmutar. Para limitar la frecuencia de operación puede recurrirse, entre otras, a una de las siguientes estrategias de conmutación

- 1) Histéresis
- 2) Agregado de una señal auxiliar (PWM)

### 4.3 Histéresis

La figura 4.1 muestra como, reemplazando el relé ideal por uno con histéresis, puede limitarse la frecuencia de conmutación en sistemas de control por modo deslizante real. En particular, se muestra que  $s(x)$  presenta un rizado de amplitud  $2h$  cuya frecuencia es la de la conmutación de la llave. Calculemos como está relacionada la histéresis con la frecuencia de conmutación para evitar que ésta supere la frecuencia de operación máxima de la llave.

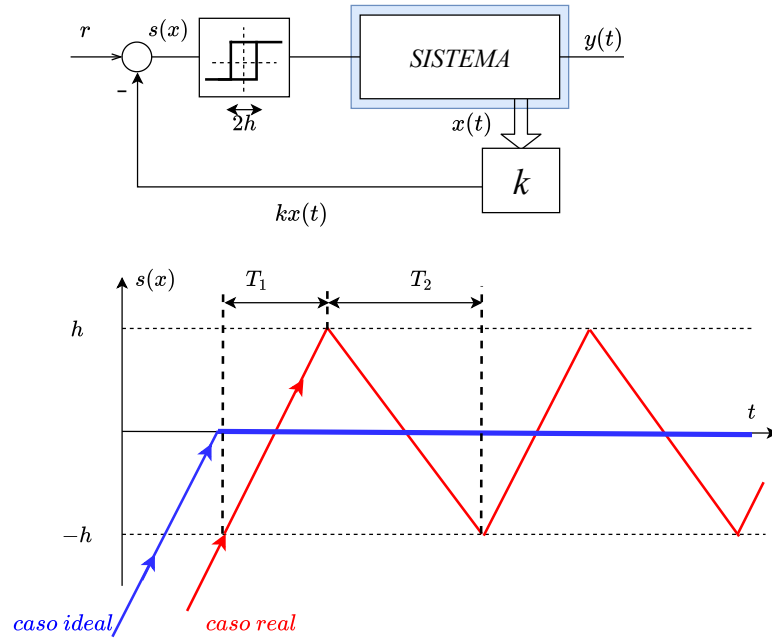


Figure 4.1: Limitación de la frecuencia de conmutación empleando un dispositivo con histéresis

En el caso del MD ideal se verifica que

$$\dot{s}(x) = 0 = \dot{r} - kAx - kBu_{eq} \quad (4.1)$$

sin embargo, en el MD real,

$$\dot{s}(x) = \dot{r} - kAx - kBu_{lim}, \quad (4.2)$$

donde  $u_{lim}$  puede tomar los valores  $u^+$  y  $u^-$ .

Si restamos (4.2) a (4.1), obtenemos que



$$\dot{s}(x) = -kB(u_{\text{lim}} - u_{eq}), \quad (4.3)$$

donde hemos supuesto que, el entorno de la superficie, los estados  $x$  no difieren significativamente.

La frecuencia con la que está operando el sistema en MD real es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_1 + t_2}, \quad (4.4)$$

donde los tiempos  $T_1$  y  $T_2$  se pueden estimar en forma aproximada a partir de la figura (4.1) y de la ecuación (4.3) como

- $$\dot{s}(x) = \frac{2h}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2h}{-kB(u^- - u_{eq})} \quad (4.5)$$

- $$\dot{s}(x) = \frac{2h}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{-2h}{-kB(u^+ - u_{eq})} \quad (4.6)$$

Luego,

$$f = \frac{kB}{2h} \frac{(u^+ - u_{eq})(u_{eq} - u^-)}{(u^+ - u^-)}. \quad (4.7)$$

Vemos que la frecuencia de conmutación depende de los niveles de  $u^+$  y  $u^-$ , de la histéresis  $h$ , y del control equivalente que a su vez depende tanto de la matriz  $A$  del sistema de lazo abierto como de la asignación de autovalores que se realice (a través de las ganancias de la superficie  $k_i$ ). La expresión (4.7) nos da una idea de como podemos elegir  $h$  para limitar la frecuencia por debajo de la máxima del dispositivo. Sin embargo, la presencia del control equivalente no nos permite un cálculo inmediato. Luego, es útil verificar si la expresión (4.7) presenta algún máximo para algún valor de  $u_{eq}$ , para ello hacemos

$$\frac{df}{du_{eq}} = 0, \quad (4.8)$$

encontrando que  $f$  efectivamente presenta un máximo

$$f_{\text{max}} = \frac{kB}{2h}(u^+ - u^-) \quad (4.9)$$

para

$$u_{eq} = \frac{u^+ + u^-}{2}. \quad (4.10)$$

Teniendo presente que la elección de los valores  $u^+$  y  $u^-$  esta fuertemente vinculada a la región de operación del MD, la expresión (4.9) claramente nos dice como elegir el ancho de la histéresis  $h$  para limitar la frecuencia de conmutación por debajo del máximo valor permitido por el dispositivo.

En el caso de que el chattering no fuese aceptable, deberíamos relajar las especificaciones para el lazo cerrado y elegir una nueva superficie.

#### 4.4 Agregado de una señal auxiliar (PWM)

Incorporando una señal auxiliar  $\delta(t)$ <sup>1</sup> a la superficie  $s(x)$ , como se indica en la figura 4.2, es posible establecer la frecuencia de conmutación de antemano y así garantizar que esté por debajo de la frecuencia límite de nuestros dispositivos de conmutación (en particular de los dispositivos electrónicos). Si bien este procedimiento para fijar una frecuencia de conmutación es inmediato, tiene un costo. El costo es que  $s(x)$ , que idealmente debería ser cero, va a presentar

- un valor medio  $S_m$
- un ripple  $\Delta s(x)$  debido a que la frecuencia de conmutación es finita.

En la figura 4.2 se ha graficado la evolución temporal de la función  $s(x)$ . Note que la conmutación de la llave ya no se producirá cuando  $s(x)$  se anule, sino cuando lo hace

$$s'(x) = s(x) - \delta(t). \quad (4.11)$$

En la figura se puede ver que, la evolución de  $s(x)$  está en el entorno de un valor medio  $S_m$  y que presenta un ripple  $\Delta s(x)$  alrededor de este valor de  $s(x)$ . Dado que la conmutación se produce cuando (4.11) es igual a cero, el efecto del agregado de la señal  $\delta(t)$  puede interpretarse como un cambio de superficie ( $s'(x)$ ).

Es importante encontrar expresiones tanto del valor de  $S_m$  como de la amplitud de  $\Delta s(x)$  que nos permitan acotarlos.

---

<sup>1</sup> Por simplicidad, supondremos que la señal auxiliar es una onda triangular de amplitud  $A$ .

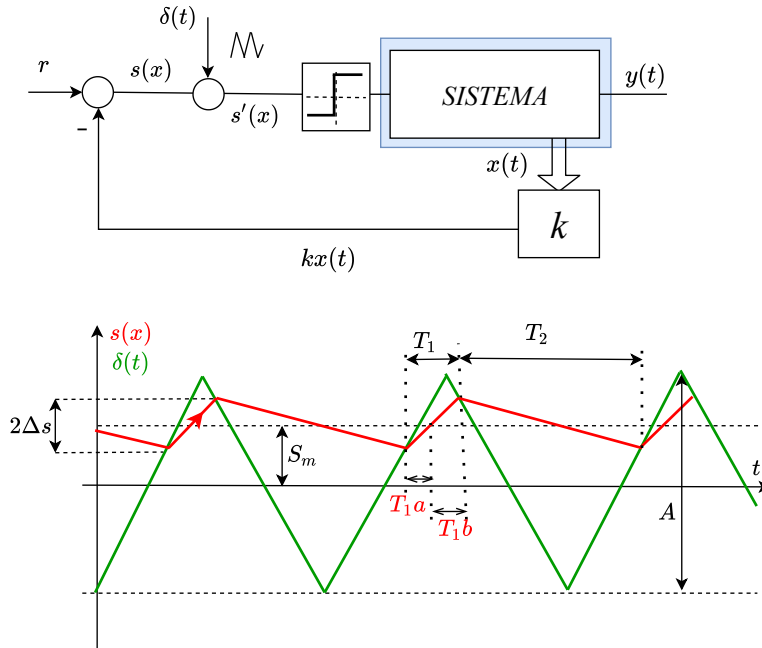


Figure 4.2: Limitación de la frecuencia de conmutación con el agregado de una señal externa

#### 4.4.1 Cálculo de $\Delta s$

Con ayuda de la figura 4.2 podemos valernos de las expresiones de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T$

$$T_1 = \frac{2 \Delta s}{\dot{s}(x)|_{u^-}} = \frac{2 \Delta s}{-kB(u^- - u_{eq})} \quad (4.12)$$

$$T_2 = \frac{2 \Delta s}{\dot{s}(x)|_{u^+}} = \frac{2 \Delta s}{-kB(u^+ - u_{eq})} \quad (4.13)$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{f}. \quad (4.14)$$

siendo  $f$  la frecuencia de la onda auxiliar, que coincide con la frecuencia de la conmutación. Luego tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas ( $T_1$ ,  $T_2$  y  $\Delta s$ ) que fácilmente podemos despejar

$$T_1 = T \frac{(u^+ - u_{eq})}{(u^+ - u^-)} \quad (4.15)$$

$$T_2 = T \frac{(u_{eq} - u^-)}{(u^+ - u^-)} \quad (4.16)$$

$$\Delta s = \frac{kB}{2} \frac{(u_{eq} - u^-)(u^+ - u_{eq})}{(u^+ - u^-)} T. \quad (4.17)$$

donde, la última ecuación pone de manifiesto la dependencia del rizado en  $s(x)$  con respecto a las variables en juego.

#### 4.4.2 Cálculo $S_m$ .

A partir de la figura 4.3 podemos plantear semejanza entre triángulos y escribir

$$\frac{A}{T/4} = \frac{A - (S_m - \Delta s)}{T_{1a}} \quad \Rightarrow \quad S_m - \Delta s = A - \frac{A}{T/4} T_{1a}, \quad (4.18)$$

a su vez, de la figura 4.3 también resulta

$$\frac{A}{T/4} = \frac{A - (S_m + \Delta s)}{T_{1b}} \quad \Rightarrow \quad S_m + \Delta s = A - \frac{A}{T/4} T_{1b}. \quad (4.19)$$

Luego, a partir de sumar las expresiones 4.18 y 4.19,

$$S_m = A - 2 \frac{A}{T} \underbrace{(T_{1a} + T_{1b})}_{T_1}, \quad (4.20)$$

podemos calcular el apartamiento  $S_m$  con respecto al comportamiento ideal de  $s(x) = 0$

$$S_m = A \frac{2u_{eq} - (u^+ + u^-)}{(u^+ - u^-)}. \quad (4.21)$$

En el caso de que este valor no fuese compatible con la precisión deseada, se puede

- modificar los parámetros que influyen sobre  $S_m$ : disminuir la amplitud de la onda auxiliar, variar  $u_{eq}$  a partir de las especificaciones de lazo cerrado, modificar los valores  $u_{lim}$

- incorporar una acción integral de control que permita eliminar el valor medio  $S_m$ .

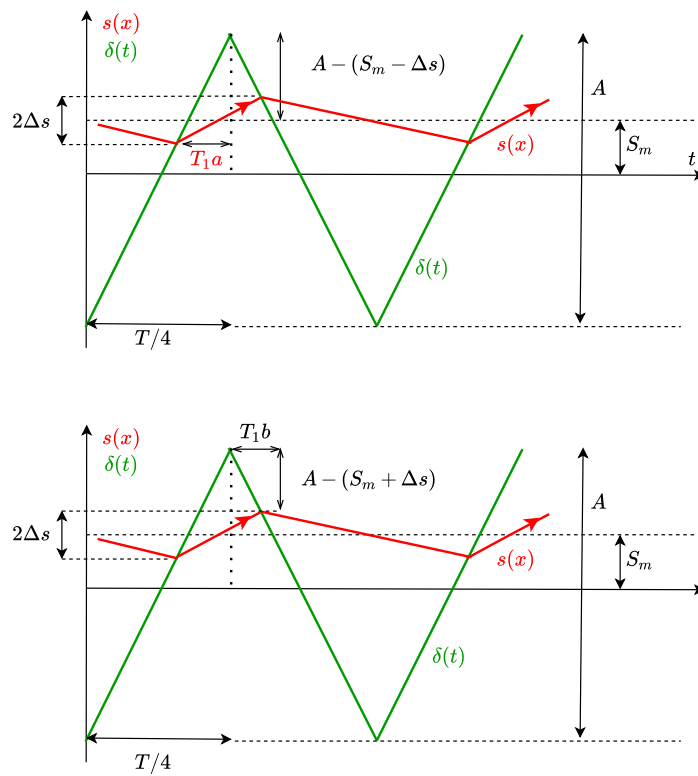


Figure 4.3: Detalle de la evolución temporal de  $s(x)$  para el cálculo de  $\Delta s$  y  $S_m$

**Nota.** Para que el sistema opere correctamente es necesario que la pendiente de la onda triangular sea mayor que la pendiente de  $s(x)$ , caso contrario podría establecerse un MD sobre la onda agregada (Figura 4.4). La peor condición se dará cuando  $u_{lim} = u^+$  y  $u_{eq} = u^-$  o cuando  $u_{lim} = u^-$  y  $u_{eq} = u^+$ . En cualquiera de los dos casos, puede obtenerse la siguiente condición

$$\frac{A}{T/4} > kB(u^+ - u^-) \quad (4.22)$$

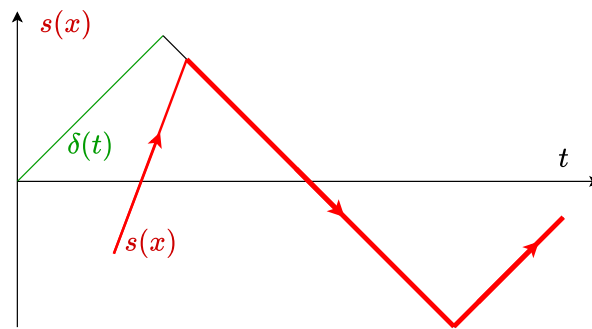


Figure 4.4: Evolución temporal de  $s(x)$  con establecimiento de un MD sobre  $\delta(t)$

## 5

# APLICACIONES EN SISTEMAS SISO LINEALES

### 5.1 Fuente Buck

Es importante remarcar que no siempre la superficie debe incluir todos los estados. Esto dependerá de los objetivos del control. En el caso de la asignación de autovalores es relevante incorporar todos los estados, pero en otros casos no es así. Para ir trabajando este concepto, analizamos distintos objetivos de control en una fuente conmutada Buck. La figura 5.1a muestra un esquema de esta fuente. Dependiendo del estado (conducción o corte) de los dispositivos electrónicos, el circuito puede esquematizarse como se indica en la parte *b* de la figura.

Podemos plantear un modelo para cada posición de la llave: En particular si elegimos como variables de estado a la corriente por el inductor y a la tensión en el capacitor

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

los modelos resultan

**Modelo para la llave en posición  $u = 0$**

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= \frac{1}{L}(-v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}(i_L - \frac{v}{R}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

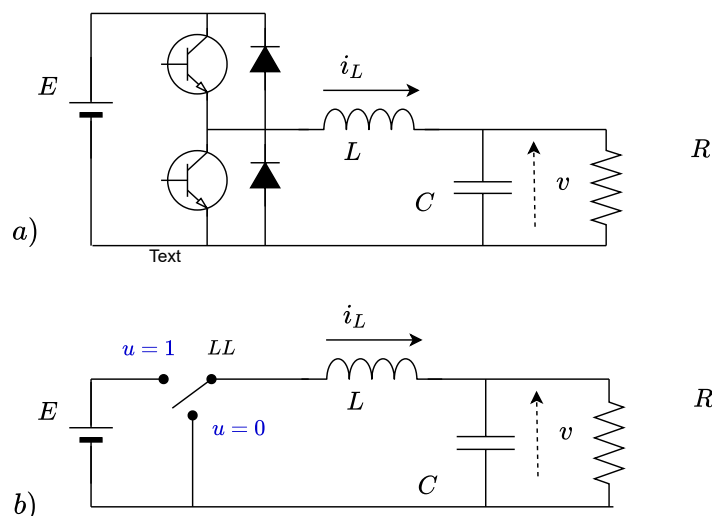


Figure 5.1: a) Fuente Buck, b) esquema de fuente Buck reemplazando los dispositivos electrónicos por una llave  $LL$

#### Modelo para la llave en posición $u = 1$

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= \frac{1}{L}(E - v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}(i_L - \frac{v}{R}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ambos modelos pueden reducirse a uno único, válido para ambas posiciones de la llave

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L}u \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{CR}v. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Vemos que el modelo (5.4) es lineal, pudiendo expresarlo en forma matricial como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Con el fin de comprender el manejo de las herramientas del control que estamos estudiando, evaluemos distintas superficies para el circuito de la figura 5.1.



- - Caso 1. Superficie de control de tensión

$$s_v(x) = r_v - v = 0 \quad (5.6)$$

donde  $r_v$  es la referencia de tensión. De acuerdo a la notación empleada en capítulos previos para  $s(x) = r - kx = 0$ , este caso corresponde a  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$ .

- - Caso 2. Superficie de control de la corriente por el inductor

$$s_{i_L}(x) = r_{i_L} - i_L = 0 \quad (5.7)$$

donde  $r_{i_L}$  es la referencia para la corriente del inductor.

- - Caso 3. Superficie de control genérica incluyendo los dos estados

$$s(x) = r - k_1 i_L - k_2 v = 0 \quad (5.8)$$

- -Caso 4. Superficie de control genérica incluyendo expansión de estados

Nos detendremos con más detalle en el análisis de las dos primeras superficies y dejaremos planteado como problemas propuestos los análisis correspondientes a las últimas dos.

#### - Caso 1. Superficie de tensión.

En este primer caso consideramos la superficie de control de tensión (5.6). En principio, éste parecería el caso más obvio, ya que sabemos que los convertidores Buck suelen emplearse como fuentes conmutadas de tensión.

Note que al elegir de esta manera la superficie (con ganancias  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$ ) estamos renunciando a asignar el único autovalor de lazo cerrado en MD. En este caso, estamos dando prioridad excluyente al hecho de controlar la tensión en su valor de referencia. Obviamente, en casos como este, siempre es necesario verificar que la dinámica del autovalor resultante sea estable.

Ante todo, verifiquemos las condiciones que nos dicen si el sistema va a poder operar en MD. Empezamos con la condición de transversalidad que nos dice que es necesario que

$$kB \neq 0. \quad (5.9)$$

En nuestro caso

$$kB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.10)$$

**Uy! Empezamos mal! No se cumple la condición necesaria!!**

Que no se cumpla la condición de transversalidad nos está diciendo que es imposible mantener la tensión constante conmutando la llave. Esto puede resultar extraño para aquellos que no han trabajado previamente con la fuente Buck, pero no nos detengamos, sigamos con el análisis y veamos si es posible controlar la tensión en forma indirecta a través de otra variable.<sup>1</sup>

### - Caso 2. Superficie de corriente.

Consideremos ahora la superficie de control

$$S_{i_L}(x) = r_{i_L} - i_L = 0. \quad (5.11)$$

Para ver si es viable (si es posible mantener la corriente constante a partir de conmutar la llave  $LL$ ), verificamos la condición de transversalidad

$$kB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0. \quad (5.12)$$

**Ahora sí!**

Como la condición necesaria de transversalidad se cumple, continuamos con el cálculo del control equivalente a partir de la condición de invarianza

$$\begin{aligned} s(x) &= 0 \\ \dot{s}(x) &= 0 = \dot{r}_{i_L} - \dot{i} = \dot{r}_{i_L} + \frac{1}{L}v - \frac{E}{L}u_{eq} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Reemplazando (5.4) en (5.13), el control equivalente resulta

$$u_{eq} = \frac{L}{E}\dot{r}_{i_L} + \frac{1}{E}v. \quad (5.14)$$

Para que el control por MD se mantenga  $u_{eq}$  debe de estar entre los límites mínimo y máximo disponibles,  $u^- = 0$  y  $u^+ = 1$  respectivamente,

---

<sup>1</sup>Que no se pueda controlar la tensión conmutando la llave, NO es una limitación del MD, es una limitación física del circuito. En la fuente Buck la tensión se controla en forma indirecta y no a partir del error en tensión como variable excluyente.

$$0 < u_{eq} = \frac{L}{E} \dot{r}_{i_L} + \frac{1}{E} v < 1. \quad (5.15)$$

Si consideramos que la referencia  $r_{i_L}$  de corriente es constante, la condición (5.15) equivale a

$$0 < v < E. \quad (5.16)$$

Es decir que podrá mantenerse la corriente en el valor de referencia en la medida que la tensión de salida sea inferior a la tensión de alimentación  $E$ . Esto es la ratificación de algo que probablemente ya conozca, ya que la fuente Buck es una fuente reductora.

Si nuestro objetivo final es mantener la tensión de salida constante en un valor  $r_v < E$ , habría que ver qué valor de la referencia de corriente  $r_{i_L}$  lo permite. Dado que

$$v = R i_L, \quad (5.17)$$

deberíamos elegir

$$r_{i_L} = \frac{r_v}{R}, \quad (5.18)$$

para controlar en forma indirecta la tensión a partir del control de la corriente  $i_L$ . Como en la superficie (5.11), se han impuesto los valores de ganancias  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 0$ , habría que verificar la estabilidad de la dinámica que resulta. Para ello, reemplazamos el control equivalente en las ecuaciones de lazo abierto (5.5) y, también, tenemos en cuenta que mientras el sistema opera en MD,  $i_L = r_{i_L}$  (con  $r_{i_L} = r_v/R$ ). Luego, a lazo cerrado

$$\begin{cases} \dot{i}_L = -\frac{1}{L}v + \frac{v}{L} = 0 \\ \dot{v} = \frac{1}{CR}r_v - \frac{1}{CR}v \end{cases} \quad (5.19)$$

La primera ecuación diferencial, nos dice que durante el MD la corriente no cambia (de hecho, éste ha sido el objetivo de nuestro control, mantener  $i_L$  en su valor de referencia). La segunda ecuación nos dice como varía la tensión de salida mientras mantenemos la corriente constante. Lo hace con una constante de tiempo  $RC$  que se corresponde con el autovalor que resulta al forzar las ganancias en  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 0$ . Obviamente esta dinámica podría haber sido asignada eligiendo otros valores de  $k_1$  y  $k_2$  (es decir eligiendo otra superficie). También vemos que, igualando a cero la segunda ecuación diferencial, la tensión tiende al valor de  $r_v$  en estado estacionario. La dinámica

que describe la tensión se conoce como dinámica escondida, ya que si sólo se observa la variable controlada (en este caso,  $i_L$  según la superficie elegida), no es posible detectar que las otras variables ( $v$  en el presente ejemplo) puedan estar cambiando.

La figura 5.2 muestra la evolución de las variables. Una vez que la corriente alcanza la superficie entra en régimen deslizante, su valor permanece constante en  $r_{i_L}$  y la tensión evoluciona con la constante de tiempo  $RC$ .

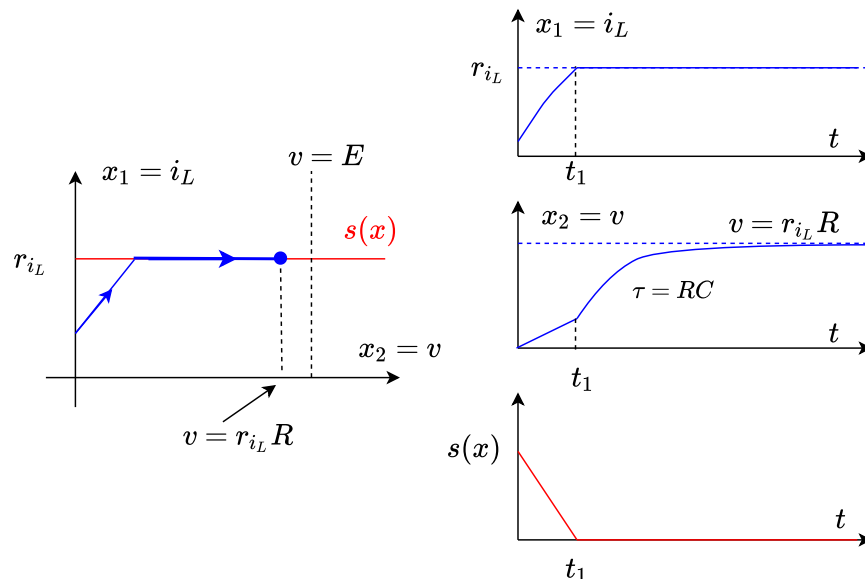


Figure 5.2: Evolución de las variables en la fuente Buck con control de corriente

La figura 5.3 muestra las trayectorias para distintas referencias de corriente  $r_{i_L}$ . La recta inclinada corresponde al lugar geométrico de los puntos de equilibrio  $r_{v_{ss}} = r_{i_L} R$ . Podemos ver que si se fuerza una referencia de corriente elevada, el punto de equilibrio de la tensión  $r_v$  caerá fuera de la región en que es posible el MD ( $v < E$ , ecuación (5.16)), por consiguiente, si bien puede establecerse un MD, el mismo se interrumpirá cuando la trayectoria cruce el límite  $v = E$ .

Analizando las expresiones previas, vemos que

- cambios de los parámetros  $R$ ,  $L$  o  $C$  no impiden que la corriente se mantenga en su valor de referencia (se dice que el control es completamente robusto en *este sentido*),

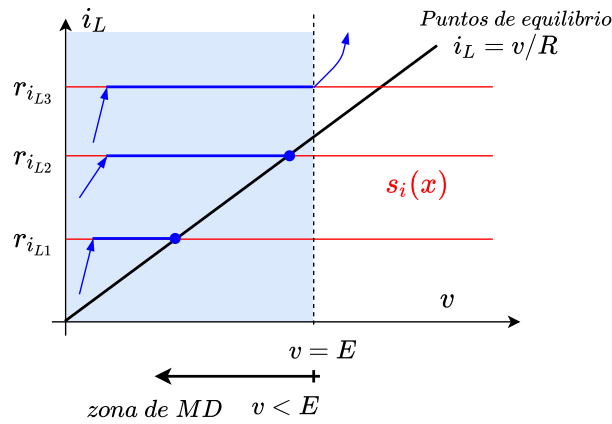


Figure 5.3: Trayectorias en el plano de fase de la fuente Buck con control de corriente

- cambios en  $R$  y  $C$  afectan la constante de tiempo con que evoluciona la tensión a su valor de equilibrio,

- cambios en  $R$  afectan el valor de la tensión en estado estacionario  $r_{v_{ss}} = Rr_{i_L}$ . Luego si cambia  $R$ , la tensión se apartará del estado de equilibrio deseado  $r_v$ . Si nuestro objetivo final era hacer una fuente tensión, esto es un problema.

**Pregunta:** ¿Cómo afectan los cambios de  $L$ ,  $R$ ,  $C$  y  $E$  al control equivalente? ¿y a los rangos de trabajo de la corriente por el inductor? ¿y a la tensión de salida?

### - Caso 3. Superficie genérica.

Como tercer caso consideremos una superficie de control genérica que incluya todos los estados

$$s(x) = r' - k_1 i_L - k_2 v = 0 \quad (5.20)$$

es decir, una superficie que se ajusta más explícitamente a lo que hemos venido viendo en capítulos previos (figura 5.4).

El desarrollo de este caso no debería presentar mayor dificultad y queda

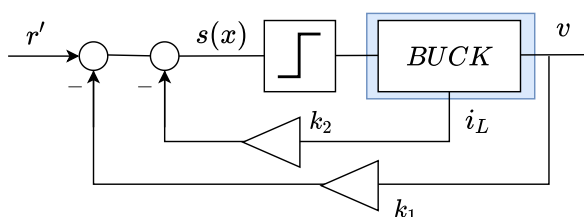


Figure 5.4: Esquema de control con superficie que incluye los dos estados

como ejercicio propuesto. Se sugiere verificar que

- en este caso no habrá dinámica escondida. Tanto la corriente  $i_L$  como la tensión  $v$  evolucionarán con la dinámica del único autovalor de lazo cerrado que se asigne con las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  de la superficie
- el valor del control equivalente y el rango de operación en que el circuito puede operar en MD dependen tanto de las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  como de los componentes del circuito
- también es importante determinar la robustez que presenta el control frente a cambios en los valores de los componentes del circuito y la forma en que debe seleccionarse  $r'$  para que en estado estacionario la tensión tienda al valor deseado  $r_v$ .

#### - Caso 4. Superficie incluyendo expansión de estados.

Si resolvió el problema planteado en el caso 3, habrá podido verificar que la tensión no es completamente robusta a cambios de algunos valores de los componentes del circuito y que, por consiguiente, la tensión  $v$  puede presentar error de estado estacionario con respecto a  $r_v$ . Para solucionar este problema se puede expandir el circuito con una acción integral como se indica en la figura 5.5a e incluir el nuevo estado en la superficie. Cordialmente, le sugiero verificar los mismos puntos que para el caso 3.

Más allá del cálculo de las ganancias, es interesante notar que unos pocos pasos de álgebra de bloques permite transformar la parte *a* de la figura 5.5 en el diagrama en bloques de la parte *b* de dicha figura. Este esquema corresponde al control convencional de la fuente Buck con un control PI de dos grados de libertad. Es una práctica generalizada diseñar este controlador con reglas "a dedo". La equivalencia de las figuras nos indica que un diseño más "serio" del controlador PI puede ser realizado, en forma muy simple, a partir de una asignación de la dinámica de la fuente a través del cálculo de las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ .

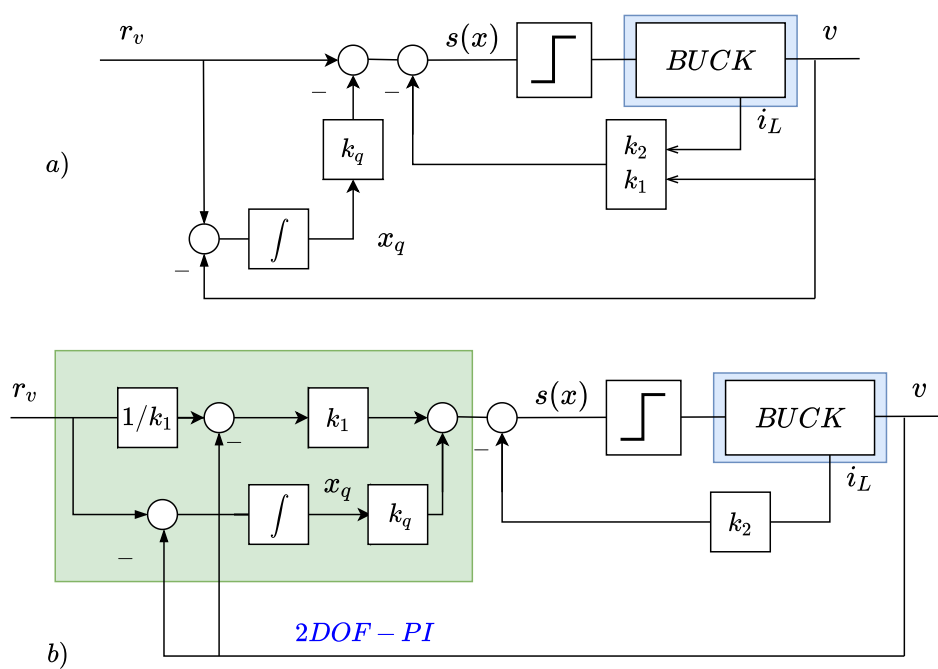


Figure 5.5: a) Diagrama en bloques del control con una superficie que incluye expansión con estado integral. b) Vinculación con control PI convencional

## 5.2 Diseño de observadores de estado con MD

En el capítulo 3 vimos como emplear un observador de estados (convencional) a los efectos de poder implementar una superficie de control por MD. En esta sección nos detendremos en ver como implementar ese observador con técnicas de regímenes deslizantes. La figura 5.6 muestra un esquema del sistema cuyos estados se quieren observar y el observador implementado con MD.

Para el diseño del observador, separamos los estados del sistema en dos grupos, estados a observar  $x_1$  y estados medidos  $x_2$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad (5.21)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}y + B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}y + B_2u. \end{aligned} \quad (5.22)$$

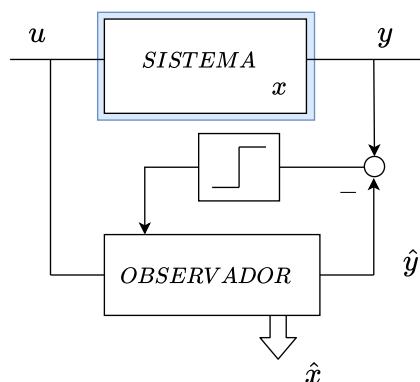


Figure 5.6: Observador de estados con corrección por MD

Consideraremos el caso más desfavorable en que sólo se puede medir un estado, la variable a controlar. Luego  $x_2$  se reduce a  $y$ . En este caso las dimensiones de las submatrices son

$$\begin{aligned} A_{11} &\rightarrow (n-1) \times (n-1) \\ A_{12} &\rightarrow (n-1) \times 1 \\ A_{21} &\rightarrow 1 \times (n-1) \\ A_{22} &\rightarrow 1 \times 1 \\ B_1 &\rightarrow (n-1) \times 1 \\ B_2 &\rightarrow 1 \times 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$



Por otra parte, el observador es otro sistema dinámico cuya estructura la forzamos a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{y} + B_1u + L_1w & \text{con} & \quad L_1^T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{x}}_2 &= A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}\hat{y} + B_2u + L_2w & \text{con} & \quad L_2^T = l_n \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde incorporamos toda la información disponible del sistema.

Restando las ecuaciones (5.22) y (5.24), obtenemos las ecuaciones dinámicas del error de observación

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{y} - L_1w \\ \dot{\tilde{y}} &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{y} - L_2w. \end{aligned} \quad (5.25)$$

A diferencia de como se implementa un observador convencional donde la señal de corrección es continua, aquí la idea es implementar esa corrección a partir de una señal discontinua por MD. Con este fin, hacemos que  $w$  sea de la forma

$$w = M \operatorname{sig}(s(\tilde{x})) \quad (5.26)$$

y planteamos como superficie de MD para el observador

$$s(\tilde{x}) = \tilde{y} = y - \hat{y} = 0. \quad (5.27)$$

Para el cálculo de la amplitud de  $M$  en (5.26) deberíamos garantizar que

$$\begin{aligned} \text{si } s(\tilde{x}) > 0 &\Rightarrow \dot{s}(\tilde{x}) < 0 \\ \text{si } s(\tilde{x}) < 0 &\Rightarrow \dot{s}(\tilde{x}) > 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

es decir que se alcance la superficie (Modo Alcance) y así poder establecer un MD sobre ella. Luego, con esta finalidad calculamos la derivada  $\dot{s}(\tilde{x})$

$$\begin{aligned} \dot{s}(\tilde{x}) &= \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{y}} &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{y} - L_2M \operatorname{sig}(\tilde{y}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde vemos que, para que  $\dot{s}(\tilde{x})$  tenga distinto signo que  $s(\tilde{x})$ , es necesario que

$$L_2 M > A_{21} \tilde{x}_1 + A_{22} \tilde{y}. \quad (5.30)$$

Una vez garantizado el MA, calculamos el control necesario para mantenernos en la superficie

$$\dot{s}(\hat{x}) = 0 = A_{21} \tilde{x}_1 + \underbrace{A_{22} \tilde{y}}_{=0} - L_2 w_{eq}. \quad (5.31)$$

Note que a diferencia de la ecuación (5.30), ahora en (5.31),  $\tilde{y} = 0$ . Esto es porque estamos en MD en la superficie  $s(\hat{x}) = \tilde{y} = 0$ . Luego, el control equivalente resulta

$$w_{eq} = \frac{A_{21}}{L_2} \tilde{x}_1, \quad (5.32)$$

debiendo verificar la condición necesaria y suficiente para la existencia del MD

$$-M < w_{eq} = \frac{A_{21}}{L_2} \tilde{x}_1 < M. \quad (5.33)$$

Reemplazando el control equivalente en las ecuaciones de lazo abierto obtenemos la expresión de lazo cerrado

$$\dot{\tilde{x}}_1 = A_{11} \tilde{x}_1 + \underbrace{A_{12} \tilde{y}}_{0 \text{ en MD}} - L_1 \underbrace{\frac{A_{21}}{L_2} \tilde{x}_1}_{w_{eq}} \quad (5.34)$$

y reagrupando, obtenemos la ecuación diferencial de los  $n - 1$  errores de observación

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \left( A_{11} - \frac{L_1}{L_2} A_{21} \right) \tilde{x}_1, \quad (5.35)$$

donde vemos que eligiendo las ganancias

$$\frac{L_1}{L_2} = \left[ \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \dots & l_{n-1} \end{array} \right]^T \quad (5.36)$$

pueden asignarse los autovalores del observador que definen la velocidad con

que los errores de observación convergen a cero.

La figura 5.7 muestra un esquema del observador por MD.

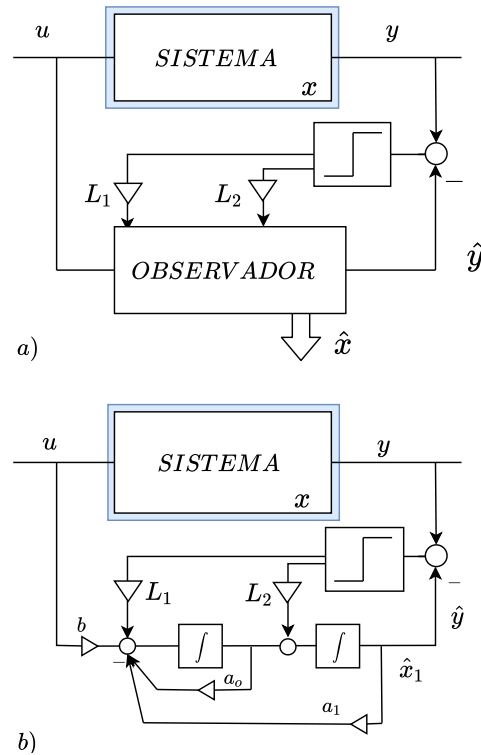


Figure 5.7: a) Observador de estados por MD. b) Caso particular para sistema con 2 estados canónicos controlables

**Nota.** Desde el punto de vista teórico, la dinámica de los errores de observación serían lo que se conoce como “dinámicas escondidas”, ya que si bien durante el MD se cumple plenamente el objetivo de forzar la convergencia de la salida del observador  $\hat{y}$  a la salida del sistema  $y$ , internamente los estados del observador siguen evolucionando, convergiendo al valor de los estados reales sin que esto sea observado en la salida. Pero, a diferencia del ejemplo previo, en este caso las dinámicas escondidas son asignadas a través de las ganancias del observador.

### 5.3 Implementación de un control PID por MD

Los controladores proporcional-integral-derivativos (PID) son ampliamente utilizados en aplicaciones industriales, siendo comúnmente preferidos a los

controladores obtenidos a partir de técnicas más sofisticadas. La figura 5.8 muestra un esquema de control PID donde pueden distinguirse el proceso bajo control, un controlador y el actuador de potencia A.

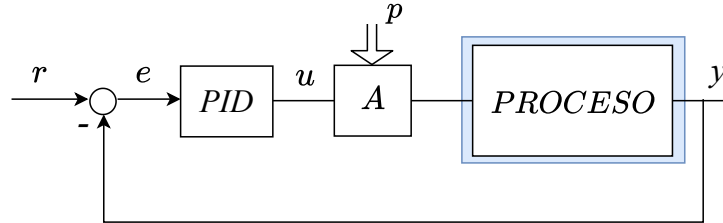


Figure 5.8: Lazo de control: proceso, compensación PID y actuador de potencia A

Dependiendo de las características del proceso, los actuadores pueden ser continuos o conmutados (relés, dispositivos electrónicos que funcionan como interruptores de alimentación, etc.). Por razones de eficiencia, los actuadores conmutados se usan comúnmente en procesos donde la acción de control es una variable eléctrica. Para comandar este tipo de actuadores es necesario modular la salida del controlador en dos niveles.

La Figura 5.9a muestra una estructura de controlador PID, implementada a través de un régimen deslizante que es adecuado para comandar accionadores de conmutación. De hecho, mientras que los valores de la salida  $u(t)$  habilitan o bloquean el flujo de potencia  $p(t)$ , su valor promedio preserva las acciones del controlador PID. Una propiedad atractiva de esta estructura es que evita la implementación de un derivador y, por lo tanto, los problemas asociados con los ruidos de medición. El circuito puede ser modelado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(x) + g(x)u + d = \begin{bmatrix} -k_i x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -k_p e \\ e \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

En una operación normal, el controlador indica que los estados  $[x_1, x_2]$  evolucionan sobre una superficie de control definida por:

$$s(x) = k_d e - x_1 = 0 \quad (5.38)$$

que verifica dos condiciones necesarias para lograr el régimen deslizante (su

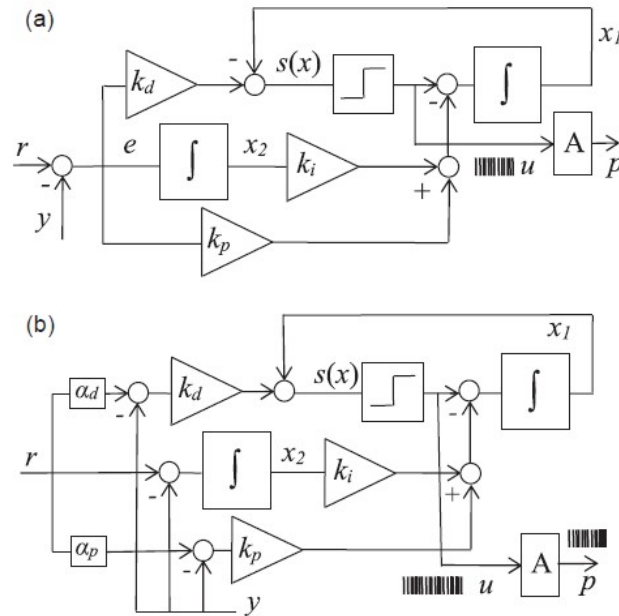


Figure 5.9: a) PID con modulación incorporada b) 2DOF/PID con modulación incorporada

grado relativo con respecto a la señal discontinua  $u(t)$  es 1, y  $KB \neq 0$ ), estando el rango del MD asociado a los valores límites  $u^+$  y  $u^-$ . Una vez que el circuito opera en MD, se cumplen las condiciones de invariancia

$$\begin{aligned} s(x) &= k_d e - x_1 = 0 \\ \dot{s}(x) &= k_d \dot{e} - \dot{x}_1 = k_d \dot{e} - (u_{eq} - k_i x_2 - k_p e) = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

siendo el control equivalente  $u_{eq}$

$$u_{eq} = k_p e + k_i \int e dt + k_d \dot{e} \quad (5.40)$$

es decir, respondiendo a las tres acciones del controlador PID.

En la figura 5.9b hemos incorporado una pequeña modificación a la estructura PID de la figura 5.9a que, sin modificar la superficie de MD, nos permite obtener la acción de control de un compensador PID con dos grados de libertad (2DOF/PID)

$$u_{eq} = k_p(\alpha_p r - y) + k_i \int e dt + k_d \frac{d(\alpha_d r - y)}{dt} \quad (5.41)$$

donde los parámetros adicionales ( $\alpha_p, \alpha_d$ ) permiten cumplir especificaciones simultáneas (básicamente, el seguimiento de set-points y el rechazo de perturbaciones) e, incluso, contribuyen a reducir los riesgos de windup.

## 5.4 Modulador por MD

Considerese el problema de codificación de señales analógicas mediante un esquema conocido como Modulador Delta. El esquema básico es el mostrado en la figura 5.10, donde pueden distinguirse las señales:

-señal cuantizada:  $\dot{x}(t) = u = K \text{sign}(y(t))$

-error de codificación local:  $y(t) = m(t) - x(t)$ .

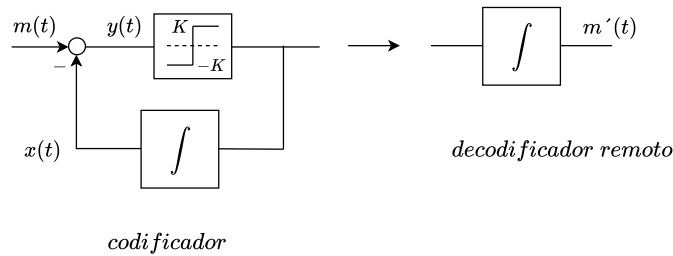


Figure 5.10: Modulador delta

En esta aplicación, la superficie de deslizamiento está representada por la función de error de codificación local  $y = m(t) - x(t)$ . Idealmente se desea  $y(t) = 0$ , es decir, que el estado del codificador local sea igual a la señal de entrada.

En régimen deslizante se verifica tanto  $y = 0$  como  $\dot{y} = \dot{m}(t) - u_{eq} = 0$ . Luego, el control equivalente es  $u_{eq} = \dot{m}(t)$ . La condición necesaria y suficiente para la existencia de un régimen deslizante en la superficie que representa error nulo de seguimiento está dada por:  $-K < \dot{m}(t) < +K$ , es decir, la velocidad de variación de la señal analógica de entrada no debe exceder los límites de cuantificación del codificador. La violación de esta condición se conoce con el nombre de saturación dinámica.

La figura 5.11 muestra el comportamiento del modulador para distintos límites de cuantificación:  $K = 3$ ,  $K = 1,5$  y  $K = 0,8$ . Mientras que para el primer caso, la onda es codificada y decodificada sin error (el sistema opera permanentemente en MD), en los otros dos casos se detecta saturación dinámica.

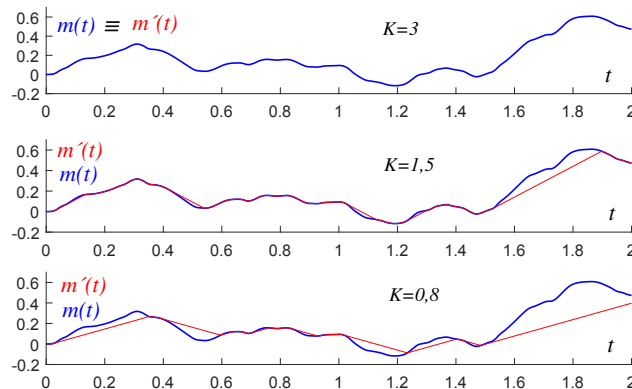


Figure 5.11: Desempeño del modulador para distintos valores de  $K$

## 5.5 Control de un sistema térmico

El control de sistemas térmicos (hornos, climatización de ambientes, etc.) suele ser implementado con accionadores del tipo on-off. Este tipo de control, suele ser suficiente para muchas aplicaciones. Responde con la máxima acción de control disponible y, principalmente, es económico y robusto en lo que se refiere a fallas de sus pocos componentes. A pesar de estas bondades, el control suele presentar una oscilación en el entorno de la referencia que hace que no sea apto para todas las aplicaciones. La figura 5.12 muestra la respuesta típica de un horno con control on-off. La figura considera un modelo convencional para los sistemas térmicos con un polo dominante y un retardo (normalmente asociado al fenómeno de traslado de masa del aire, convección natural o forzada)

Cuando se conecta la alimentación de potencia, la temperatura comienza a elevarse por encima de la ambiente, siguiendo una ley exponencial que tiende a  $\theta_f$ . Al superarse la temperatura de referencia  $\theta_r$ , el controlador on-off deja de mandar potencia pero debido al retardo ( $t_r$ ), la temperatura sigue creciendo durante  $t_r$  segundos. Luego la temperatura comienza a descender tendiendo a la ambiente. Cuando cae por debajo de la referencia, el relé

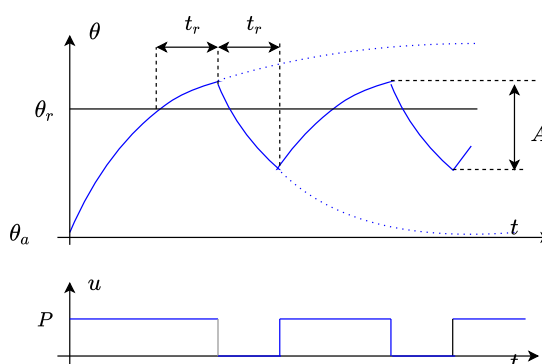


Figure 5.12: Control on-off de temperatura

comienza a entregar potencia nuevamente. Sin embargo, la temperatura continúa descendiendo durante el tiempo de retardo. Este proceso se repite dando lugar a una oscilación de amplitud  $A$  independiente de la temperatura de referencia

$$A = (1 - e^{t_r/\tau})D \quad (5.42)$$

donde  $\tau$  es la constante de tiempo del horno y  $D$  es la diferencia entre las temperaturas  $\theta_f$  y  $\theta_a$ .

Analizando este control desde el punto de vista de los modos deslizantes, podemos decir que el sistema de la figura (o cualquier otro con retardo) nunca podrá vivir en una superficie  $s(x) = \theta_r - \theta = 0$  por culpa del tiempo muerto  $t_r$ .

Una posibilidad que nos permite aplicar las ideas de control que estamos estudiando es complementarlas con nociones de control predictivo como se muestra en la figura 5.13. Note que si el modelo es consistente con el sistema la señal  $e_p$  es cero y estamos realimentando una señal que no tiene retardo y por consiguiente el MD es posible.

La fotografía 5.15 muestra la temperatura de un horno cuando se pasa de un control on-off convencional a un control predictivo con MD cambiando la posición de la llave  $L$  en la figura 5.14. Los primeros ciclos corresponden al control convencional. Cuando se conmuta al control por MD, la dispersión de la temperatura se reduce drásticamente, ya que se fuerza a la temperatura a vivir en las proximidades de la superficie  $s = \theta_r - \theta = 0$ . En la fotografía 5.16, que muestra una experiencia similar a la de la fotografía previa, se incluye en el canal superior del osciloscopio la predicción de la temperatura



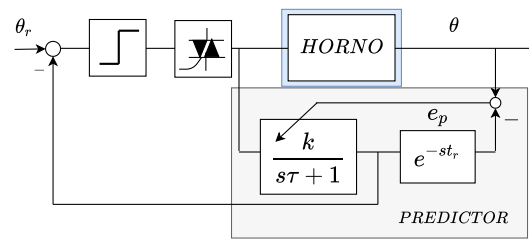


Figure 5.13: Control predictivo+MD de un horno

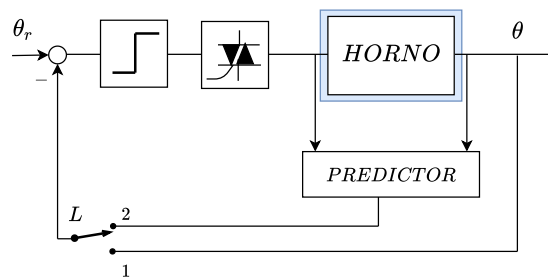


Figure 5.14: Esquema para comparar el control on-off de un horno con el control predictivo+MD

que es empleada para conmutar el actuador de potencia.

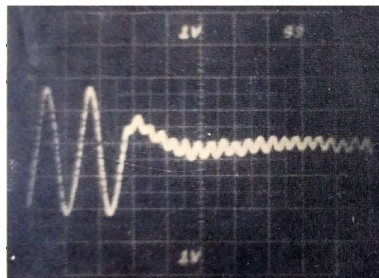


Figure 5.15: Temperatura de un horno con controles on-off y predictivo+MD

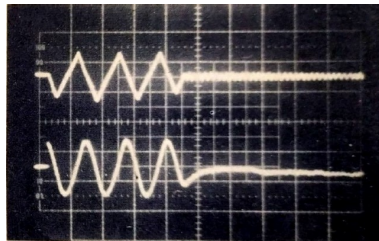


Figure 5.16: Predicción y temperatura de un horno con controles on-off y predictivo+MD

## 6

# MD PARA SISTEMAS CON RESTRICCIONES

## 6.1 INTRODUCCIÓN

<sup>1</sup> La operación de todo sistema de control está sujeta a restricciones que degradan su desempeño. Existen numerosas técnicas de control para atenuar sus efectos, por ejemplo, a partir de conceptos de MPC (control predictivo basado en modelos), LPV (sistemas lineales de parámetros variables), VSS (sistemas de estructura variable), control robusto, control óptimo, etc. En cuanto al procedimiento de diseño, claramente se distinguen dos metodologías, conocidas como de ‘uno’ y de ‘dos pasos’. En el primer caso el controlador es diseñado contemplando las restricciones, mientras que en el segundo, el controlador es diseñado para el sistema ideal (sin restricciones) y se lo complementa con un lazo de corrección que sólo actúa cuando se manifiesta alguna restricción. La función de este lazo secundario es asegurar mínima degradación con respecto al caso sin limitaciones.

En general, las restricciones se manifiestan ante excitaciones externas como cambios de referencias o perturbaciones. Dado que los cambios de la referencia suelen ser mayor magnitud que la de las perturbaciones, también sus efectos son más notorios. Tal es así, que varios autores han propuesto actuar sobre la referencia para evitar problemas debidos a saturación de los actuadores. Una de las técnicas más citada es la conocida con el nombre de ‘acondicionamiento de la referencia’ que fue propuesta por Hanus en la década del 80 para controladores PID. Si bien, en esta técnica se actúa sobre el estado integral del controlador, es deducida a partir del concepto de ‘referencia realizable’.

---

<sup>1</sup>Este capítulo es una transcripción del trabajo “Restricciones en el control. Acondicionamiento d la señal de referencia vía regímenes deslizantes”. R. Mantz, H. De Battista y F. Bianchi. RPIC03. pp 653-658. 2003

En este capítulo abordaremos el problema de acondicionamiento de la referencia a partir de regímenes deslizantes. Veremos que combinando ideas de acondicionamiento de la referencia y de MD pueden abordarse en forma simple y robusta problemas tales como windup, pérdida de direccionalidad en el control, acoplamiento dinámico en sistemas MIMO, delimitación de variables en zonas de operación segura, etc.

## 6.2 Acondicionamiento de la referencia via MD

La figura 6.1 representa un sistema de control con acondicionamiento de la señal de referencia por MD. Se pueden distinguir dos lazos:

1- **Lazo principal**, el cual es diseñado sin considerar las restricciones (el método de diseño es indistinto).  $P$  representa al proceso bajo control,  $K_a$  el actuador de potencia,  $C_2$  el controlador que asegura cumplir satisfactoriamente las especificaciones del problema sin restricciones, y  $C_1$  es un filtro pasabajos de frecuencia de corte muy superior a la correspondiente al resto del sistema (luego su presencia no afecta la respuesta del conjunto). La razón de incluir  $C_1$ , es a los efectos de garantizar el grado relativo necesario para implementar el MD.

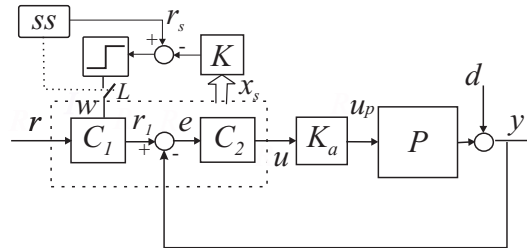


Figure 6.1: Acondicionamiento de la referencia del lazo principal por modo deslizante

Tanto  $P$  como  $C_1$  y  $C_2$  son representados por modelos de estado:

- -modelo del proceso  $P$

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= A_P x_P + B_P u_P \\ y &= C_P x_P, \end{aligned} \quad (6.1)$$

- -modelo de  $C_1$  (consideramos una expresión genérica para contemplar

que  $C_1$  pueda resultar de un controlador de dos grados de libertad)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c_1} &= A_{C_1}x_{c_1} + B_{C_1}r + B_w w \\ r_1 &= C_{C_1}x_{c_1} \\ C_{C_1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ B_w^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

- -modelo de  $C_2$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c_2} &= A_{C_2}x_{c_2} + B_{C_2}e \\ u &= C_{C_2}x_{c_2} + D_{C_2}e \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde las dimensiones de las matrices son consistentes y obviamente, los estados del controlador son accesibles. La inclusión del término  $D_{C_2}$  es a los efectos de poder considerar el caso frecuente de controladores PI.

**2- Lazo de acondicionamiento de la referencia.** El lazo de acondicionamiento está constituido por los bloques  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $K$  y el relé. La llave  $L$  indica, esquemáticamente, que el lazo sólo está activo cuando se manifiesta una restricción. La señal  $r_s$  depende de la restricción considerada. La señal discontinua  $w$  afecta la derivada del primer estado de  $C_1$  (es decir, afecta a la derivada de  $r_1$ ), y así es posible acondicionar su valor para evitar problemas debidos a las restricciones. La superficie de control del lazo acondicionante se obtiene de la combinación ponderada de los estados del controlador  $C_2$ , del error  $e$ , y de la señal  $r_s$

$$s(x_{c_2}, e, r_s) = r_s - k_e e - k_c x_{c_2} = 0, \quad (6.4)$$

es decir, a los efectos del lazo de acondicionamiento, se consideran los estados  $x_s^T = \begin{bmatrix} x_{c_2}^T & e \end{bmatrix}^T$ . La inclusión del error en la superficie de control garantiza el grado relativo 1 con respecto a  $w$ .

Por otra parte, como durante el MD se verifica que

$$\begin{aligned} s(x_{c_2}, e, r_s) &= 0 \\ \dot{s}(x_{c_2}, e, r_s) &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

el control equivalente  $w_{eq}$  que se requiere para mantener la operación de MD sobre la superficie  $s(x_{c_2}, e, r_s) = 0$  puede calcularse a partir de su derivada

$$\begin{aligned} \dot{s}(x_{c2}, e, r_s) = & -k_e (C_1 (A_1 x_{c1} + B_1 r + B_w w_{eq}) - \dot{y}) \\ & -k_c (A_2 x_{c2} + B_2 (r_1 - y)) + \dot{r}_s = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Luego, como  $C_1 B_w = 1$ ,  $w_{eq}$  resulta

$$w_{eq} = k_e^{-1} (\dot{r}_s - k_c (A_2 x_{c2} + B_2 e) - k_e (C_1 A_1 x_{c1} + C_1 B_1 r - \dot{y})). \quad (6.7)$$

Se observa que el control equivalente  $w_{eq}$  está bien definido ya que  $k_e \neq 0$ . Luego, con la ecuación (6.7), y teniendo presente la condición necesaria para establecer el MD ( $w^- \leq w_{eq} \leq w^+$ ) pueden calcularse los valores de  $w^\pm$  que aseguran el MD.

Reemplazando (6.7) en la ecuación de lazo abierto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{c2} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & C_1 B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c2} \\ e \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 A_1 x_{c1} + C_1 B_1 y - \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B_w w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.8)$$

se obtiene la ecuación dinámica del régimen deslizante que acondiciona a  $r_1$ , es decir a la entrada al lazo principal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{c2} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ k_e^{-1} k_c A_2 & k_e^{-1} k_c B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c2} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_e^{-1} \dot{r}_s \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

La redundancia de la última fila de la ecuación (6.9) pone de manifiesto la reducción de orden introducida por el MD. Esta fila puede eliminarse reemplazando el error  $e$  de la ecuación (6.9) por el calculado a partir de forzar a cero la superficie (6.4), resultando

$$[\dot{x}_{c2}] = [A_2 - B_2 k_e^{-1} k_c] x_{c2}. \quad (6.10)$$

### Comentarios e interpretación de las ecuaciones previas

- La expresión (6.8) está indicando que el segundo y tercer término del segundo miembro (interpretados como de perturbación y control del lazo

acondicionante) representan vectores colineales

$$\begin{bmatrix} 0 \\ C_1 A_1 x_{c_1} + C_1 B_1 y - \dot{y} \end{bmatrix} \in \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B_w w \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

luego el régimen deslizante presenta *robustez fuerte* (ver capítulo "Interpretación geométrica del MD") a la variable controlada  $y$ , a su derivada  $\dot{y}$  y a los estados de  $C_1$ , es decir, la dinámica del régimen de acondicionamiento es completamente independiente de estas variables. En otras palabras, la señal  $r_1$  es acondicionada sólo en concordancia con la dinámica de la superficie  $s = 0$ .

- La dinámica del lazo de acondicionamiento está dada por los autovalores de  $[A_2 - B_2 k_e^{-1} k_c]$ . Luego el diseño del controlador  $C_2$  del lazo principal no impone restricciones en la asignación de los autovalores del lazo acondicionante, es decir, la misma asignación puede hacerse para cualquier par  $C_1 - C_2$  a partir del correspondiente cálculo de  $\begin{bmatrix} k_e & k_c \end{bmatrix}^T$  y  $w^\pm$ .

### Independencia de los autovalores del lazo cerrado principal con respecto al lazo de acondicionamiento de $r_1$ .

Previamente se demostró que la señal  $y$  no afecta el lazo de acondicionamiento, y por consiguiente, tampoco a sus autovalores. Veamos que también los autovalores del lazo principal son independientes del circuito de acondicionamiento (esté o no activo). Con este fin, basta plantear la relación entre la variable controlada  $y$  y la referencia acondicionada  $r_1$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{x}_{c_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_P - B_P C_2 D_2 C_P & B_P C_2 \\ -B_2 C_P & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ x_{c_2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_P C_2 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} r_1 \\ y &= \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ x_{c_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

es decir los autovalores del lazo principal, obtenidos a partir de

$$\left| sI - \begin{bmatrix} A_P - B_P C_2 D_2 C_P & B_P C_2 \\ -B_2 C_P & A_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (6.13)$$

son completamente independientes de los del régimen deslizante encargado del acondicionamiento de  $r_1$ .

Luego, la independencia de lazos demuestra que la activación del sistema condicionante no afecta ni la estabilidad del lazo principal ni su dinámica.

## 6.3 APLICACIONES

### 6.3.1 Acondicionamiento de la referencia via MD como algoritmo anti-windup

Cuando un actuador satura, la entrada del proceso pasa a ser inconsistente con los estados del controlador. Luego, la evolución de los estados de la planta resulta independiente de los del controlador, conduciendo a comportamientos transitorios indeseados con grandes sobrepasos y prolongados tiempos de establecimiento. Este fenómeno es conocido como reset windup y a pesar que fue originalmente vinculado a controladores PID, puede producirse en cualquier controlador que presente dinámica inestable o suficientemente lenta. A continuación, se muestra cómo pueden emplearse los conceptos de acondicionamiento de la referencia vía MD para evitar este problema.

**Ejemplo 1.** Se considera el modelo de una columna de destilación binaria Wood/Berry

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} U_P + \begin{bmatrix} \frac{3.8e^{-8s}}{14.9s+1} \\ \frac{4.9e^{-3s}}{13.2s+1} \end{bmatrix} D. \quad (6.14)$$

y el controlador multi-lazo  $PI$  diseñado en con el método de Kiong

$$PI(s) = \begin{bmatrix} 0.699 \left(1 + \frac{1}{8.42s}\right) & 0 \\ 0 & -0.0895 \left(1 + \frac{1}{9.52s}\right) \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

La figura 6.2a muestra la evolución de la variable controlada  $y_1$  ante un cambio en el correspondiente setpoint. La respuesta del sistema idealizado (sin saturaciones en los actuadores) es graficada con línea llena. También se muestra (con línea de trazos) la respuesta  $y_1$  cuando el actuador correspondiente presenta una saturación definida por  $u_{P1} \in [-0.2, 0.2]$ . Puede observarse que, en presencia de saturación, aparece un notorio sobrepaso



en la variable controlada  $y_1$ , el cual es debido al windup del integrador del primer elemento  $PI_{11}$  del controlador MIMO  $PI(s)$ . La figura 6.2b muestra las acciones de control para ambos casos.

Para eliminar el windup se emplea el acondicionamiento propuesto. Teniendo en cuenta que en el diseño original  $C_1 = I$ , se incluye en cada setpoint un filtro de primer orden:

$$\dot{x}_{r_i} = \lambda_i x_{r_i} + r_i + w_i \quad (6.16)$$

donde el valor del autovalor  $\lambda_{f1} = -10$  ha sido elegido para asegurar que no introduce, de por sí, ningún cambio apreciable con respecto al caso sin filtro. Además, se consideran los valores  $w_1^+ = -w_1^- = 1$ . Además se incorpora una pequeña zona muerta (idealmente un punto,  $w = 0$  si  $s(x) = 0$ ) que garantiza que el lazo de acondicionamiento sólo opera si el actuador satura.

A los efectos de acondicionar la señal  $r_1$  y evitar el windup se elige como superficie de control  $s(x) = u_1 - u_{P_1} = 0$ , la cual verifica el grado relativo 1 con respecto a  $w$ . La extrema sencillez de  $s(x)$  se debe al carácter de bipropio del controlador, estando el error considerado en la superficie a través de la parte proporcional del controlador.

En las figuras 6.2c y d se muestran, en trazo continuo, las variables  $y_1$ ,  $u$  y  $u_{P_1}$  para el caso con acondicionamiento de la referencia por MD. A los efectos de la comparación, se han repetido (con línea de trazos) las mismas señales que las del caso sin compensación ARW. En la figura 6.2d se observa que el acondicionamiento de la referencia asegura que la salida del controlador no supera el límite de saturación del actuador y por consiguiente el windup es eliminado. En otras palabras la referencia acondicionada ( $r_1$ ) toma en todo instante el máximo valor compatible con el cambio del setpoint y con la no saturación del actuador.

*Observación.* A diferencia de otros controles de estructura variable, el objetivo de la presente compensación no es evolucionar en MD hasta el equilibrio. Efectivamente, en este caso, el régimen deslizante es un modo de operación transitorio cuyo único objetivo es condicionar la velocidad de crecimiento de la referencia para evitar que una determinada variable supere un límite preestablecido. Es decir, se busca el régimen deslizante sólo en la medida que la dinámica propia del lazo principal persista en que una determinada variable supere una cota  $x_{lim}$  (.2 en este ejemplo). Para una mejor comprensión, en la figura 6.3 se han graficado las trayectorias definidas en el plano (control  $u_1$ , estado integral  $x_{q_1}$ ) para ambos casos, con (trazo continuo) y sin (línea de trazos) la corrección propuesta, pudiéndose observar que para el caso sin corrección, la variable  $u$  incursiona en regiones donde

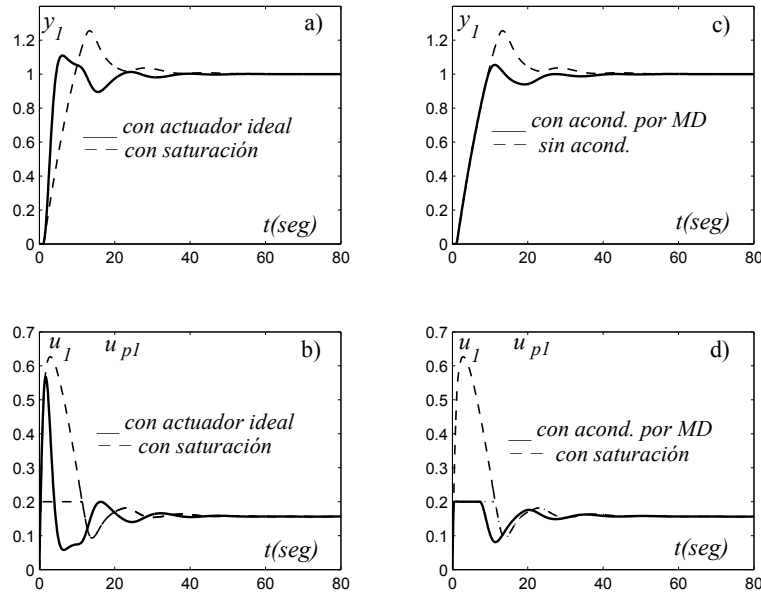


Figure 6.2: a) Efecto de la saturación sobre la variable controlada  $y_1$ , b) señales de control  $u_1$  y  $u_{p1}$  en correspondencia con la figura 6.2a, c)  $y_1$  considerando saturación en el actuador, con y sin la compensación propuesta, d) señales  $u_1$  y  $u_{p1}$  en correspondencia con figura 6.2c

satura el actuador. Por otra parte, en la trayectoria del sistema con la corrección propuesta, se observa que en cierto instante (punto A) se tiende a superar el límite  $u_{p1} = .2$  (en realidad  $u_p > u_{p1}$ ). Recién entonces, el acondicionamiento de  $r_1$ , a través del control discontinuo  $w_1$ , produce un cambio abrupto en la dirección de la trayectoria orientándola nuevamente hacia la superficie. Esta situación se repite a alta velocidad, dando lugar a un régimen deslizante (tramo A-B) que sólo se rompe cuando las trayectorias propias del sistema se escapan de la superficie (punto B) hacia la región sin restricciones restableciéndose, el comportamiento puramente lineal.

Debe notarse que no existe modo alcance, ya que el sistema de estructura variable que acondiciona la referencia se activa cuando  $s(x) = 0^-$ . Es decir con condiciones iniciales en la superficie. Este es un hecho significativo ya que, en general, el modo alcance puede degradar la respuesta global de un sistema de estructura variable. Luego, en todo el transitorio  $u = u_{p1}$ . Es decir el lazo principal opera siempre a lazo cerrado y el fenómeno de windup no se produce. Efectivamente, el windup es evitado gracias a la dosificación de la referencia, por el régimen deslizante, a la máxima velocidad compatible con la no saturación de los actuadores.

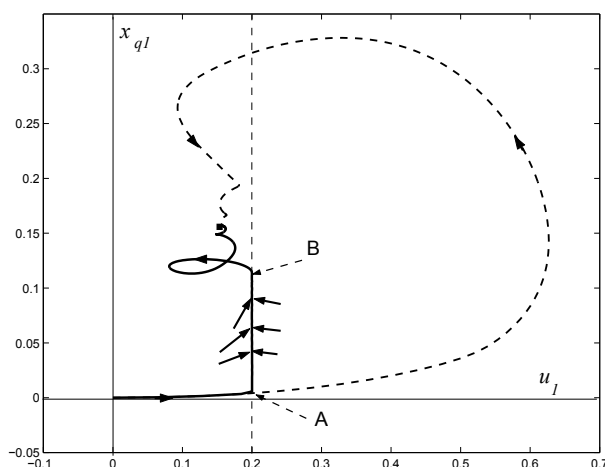


Figure 6.3: Trayectorias en el plano  $[u_1, x_{q1}]$  (estado integral de  $PI_{11}$ ) sin y con la corrección propuesta

### 6.3.2 Acondicionamiento de la referencia vía MD para garantizar operación segura

Consideremos ahora, el siguiente ejemplo. Las ecuaciones

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & .01 & 0 \\ -50 & -1 & 1 \\ -.001 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ .001 \end{bmatrix} r \quad (6.17)$$

corresponden a un sistema de control de lazo cerrado, los dos primeros estados corresponden al sistema, mientras que el tercero se debe a la acción integral de un controlador  $PI$ . Se supondrá que, por razones de seguridad, la variable del proceso  $x_2$  no debe incursionar en valores  $x_2 \geq 20$ . Como la acción de control condicionante  $w$  sólo se manifiesta en la segunda derivada de esta variable no puede proponerse una superficie de control como la propuesta en el caso previo, sino que debe incluirse, a más de  $x_2$ , alguna variable que asegure que la superficie sea de grado relativo 1. Con esta finalidad se propone una superficie  $s(x) = x_{2lim} - x_2 - k_e \dot{x}_2 = 0$ . Obsérvese, que considerando que  $x_2$  es accesible, las propiedades de acondicionamiento previamente discutidas son válidas, basta con analizar el sistema realimentado asumiendo un bloque  $C'_2$  consistente en el  $C_2$  original más el estado  $x_2$ , y un sistema  $P'$  con sólo el estado  $x_1$ . A diferencia del caso anterior el MD de acondicionamiento de la referencia se inicia antes de que la variable  $x_2$  alcance su cota máxima, evolucionando hacia ella con una velocidad impuesta por la ganancia  $k_e$ . Efectivamente, en la figura 6.4a (línea llena)

puede observarse la aproximación suave de  $x_2$  al valor máximo 20 con la dinámica rápida de modo deslizante. La figura 6.4c muestra las correspondientes trayectorias en el plano  $(x_2, \dot{x}_2)$ . La protección por MD actúa en el tramo AB, dando lugar a la evolución exponencial de  $x_2$  desde el punto A hasta el valor límite de 20 (punto B). Obviamente la abscisa de A (al igual que la dinámica de la protección) depende de  $k_e$ . Por último, en la figura 6.4b puede verse la suave degradación de la corrección sobre la variable controlada  $x_1$ . Nuevamente es importante remarcar que la protección no interrumpe el normal funcionamiento del lazo principal (los autovalores son independientes del circuito de acondicionamiento) ya que la corrección se ejerce sobre la referencia. Es decir se asegura mínima degradación de  $x_1$  sin que  $x_2$  supere  $x_{2lim}$ .

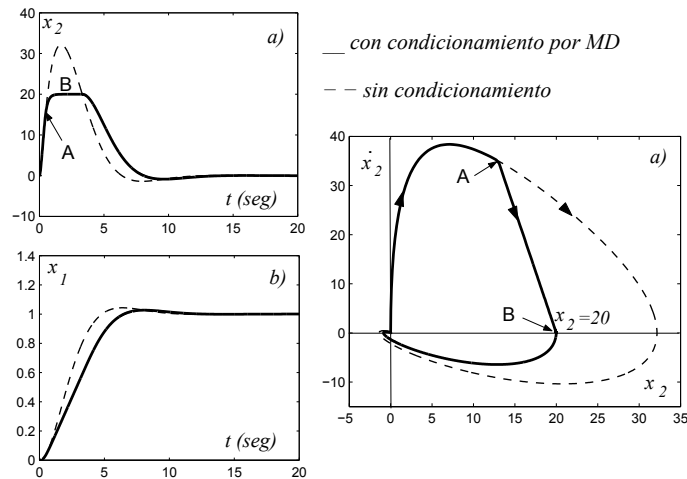


Figure 6.4: a) Variable  $x_2$  con y sin la corrección propuesta. b) Variable  $x_1$  en correspondencia con a). c) Trayectorias en el plano  $(x_2, \dot{x}_2)$ .

### 6.3.3 Acondicionamiento de la referencia aplicado al problema de acoplamiento de variables en sistemas MIMO

En todo sistema MIMO se busca que el cambio de una referencia sólo tenga efecto sobre la correspondiente variable controlada, no alterando las demás variables de salida. En general se distingue entre acoplamiento estático y dinámico, pudiendo presentar este último, una complejidad importante. Los ‘costos’ de desacoplar dependen de distintos factores, en particular de la existencia de ceros de no-mínima fase y de autovalores inestables. Una alternativa al problema de acoplamiento dinámico, propuesta aquí, es reducir las exigencias de diseño referidas al desacoplamiento (es decir, aceptar

cierto grado de acoplamiento, lo cual permite flexibilizar el diseño) y posteriormente acondicionar, vía un MD, cada referencia para que las variables cruzadas no superen una cota absoluta preestablecida.

Para evaluar la compensación propuesta se considera un tanque de mezclado, donde se desea controlar la concentración y caudal de salida, existiendo dos variables de control, los caudales de entrada  $F_1$  y  $F_2$  con concentraciones  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente. El modelo dinámico linealizado en el entorno de  $V_0$  (volumen de la mezcla),  $F_0$  y  $c_0$ , resulta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{F_0}{2V_0} & 0 \\ 0 & -\frac{F_0}{V_0} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1-c_0}{V_0} & \frac{c_2-c_0}{V_0} \end{bmatrix} u \quad (6.18)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -.01 & 0 \\ 0 & -.02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -.25 & .75 \end{bmatrix} u. \quad (6.19)$$

Un diseño simple asignando los autovalores de lazo cerrado en  $\lambda_{1,2} = -.1025 \pm j.049$  es posible con el juego de ganancias

$$-Kx = - \begin{bmatrix} .1 & 0 \\ 0 & .1 \end{bmatrix} x. \quad (6.20)$$

La figura 6.5a muestra, en línea de trazos, la evolución del caudal ante un cambio en su setpoint. Puede observarse que el acoplamiento del sistema da lugar a un cambio no deseado en la concentración. Ahora bien, el apartamiento máximo de la concentración está en relación directa con la amplitud del cambio del setpoint de caudal. Supúnganse que se desea que este apartamiento no supere la cota de .7 mas allá de la amplitud del cambio del setpoint de caudal. Con esta finalidad y siguiendo los lineamientos propuestos se propone acondicionar la referencia para no superar esta cota. Se incluye un estado en  $C_1$  (ya que originalmente  $C_1 = I$ ) de dinámica rápida y se propone una superficie de protección  $s(x) = .7 - x_2 = 0$ . Esta superficie, al ser de grado relativo 1, asegura que para el valor  $w^\pm$  correctamente elegido la referencia será acondicionada para que la variable concentración no supere la cota propuesta. Esta corrección es siempre a lazo cerrado. En la figura 6.5b se muestra, con línea llena, como el acondicionamiento de  $r_1$  evita que la concentración supere la cota de .7, mientras que en la parte a) de la figura puede observarse el efecto sobre la variable caudal de salida. La respuesta presenta mínima degradación compatible con el máximo apartamiento permitido para la concentración. De la figura se desprende la efectividad del método propuesto, resultando una alternativa real para atenuar los problemas de acople dinámico entre variables de sistemas MIMO, alternativa que puede simplificar significativamente el diseño del controlador.

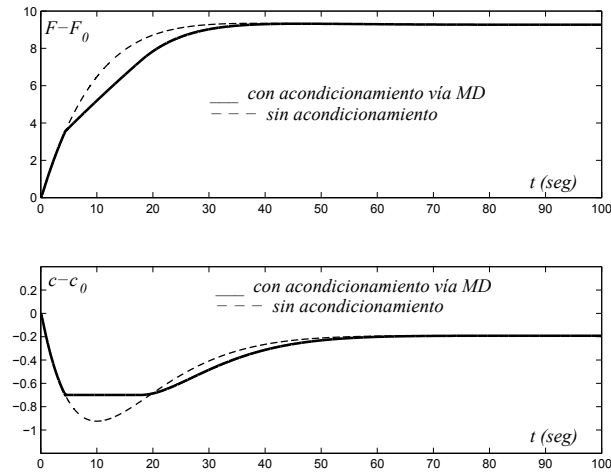


Figure 6.5: Variables controladas ante un cambio en el setpoint 1

### 6.3.4 Acondicionamiento de la referencia aplicado al problema de pérdida de direccionalidad en el control

Considérese el sistema:

$$P(s) = \frac{1}{10s + 1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

con controlador diseñado para performance lineal desacoplada

$$K(s) = \frac{10s + 1}{s} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

pudiéndose ver en la figura 6.6 la evolución temporal de las dos salidas ante un cambio abrupto del vector de referencia a:

$$r = \begin{bmatrix} .6 \\ .8 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

cuando no existen restricciones en los actuadores.

La figura 6.7 muestra nuevamente la respuesta temporal de las salidas ante la misma excitación, pero ahora en presencia de saturaciones en los actuadores en 15. Las salidas del controlador ( $u_1$  y  $u_2$ ), y las entradas al sistema P ( $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$ ) pueden verse líneas continuas y a trazos respectivamente en la parte inferior de la figura. El pronunciado deterioro en la respuesta del sistema, es básicamente atribuible al cambio de dirección de la acción

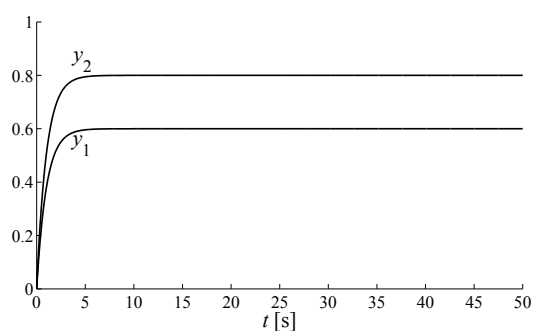


Figure 6.6: Variables controladas en ausencia de restricciones en los actuadores.

del control. Efectivamente, si bien la saturación también da lugar a windup, la corrección del mismo por distintos métodos no permite observar ninguna mejora sustancial.

En la figura 6.8 puede observarse la efectividad del método propuesto, es decir de la corrección del problema de cambio de dirección a partir de un régimen deslizante que corrige el estado del filtro de la referencia. Los filtros empleados para las referencias presentan un autovalor en -1.

Es importante remarcar que el agregado de los filtros no introducen, de por sí, una mejora apreciable. Esto es verificado en la figura 6.9 donde se observan las variables controladas (fig.6.9a) y las entradas a la planta (fig.6.9b) para el caso en que se incluye el filtro pero no se realiza la corrección de sus estados.

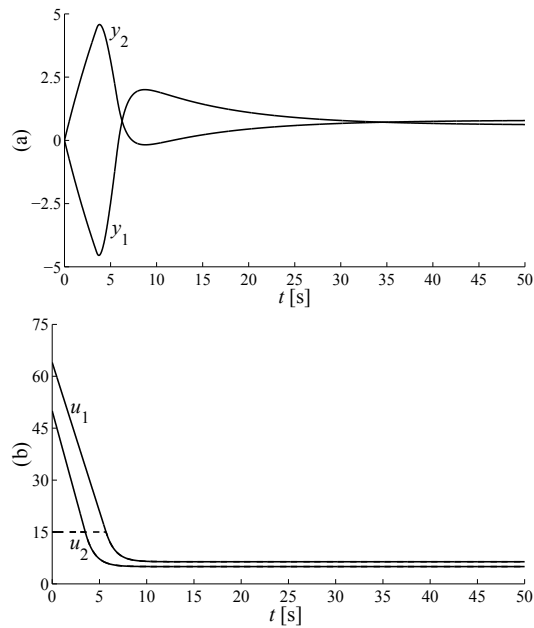


Figure 6.7: a) Variables controladas en presencia de restricciones en los actuadores. b) Salidas de los controladores y entradas en el proceso

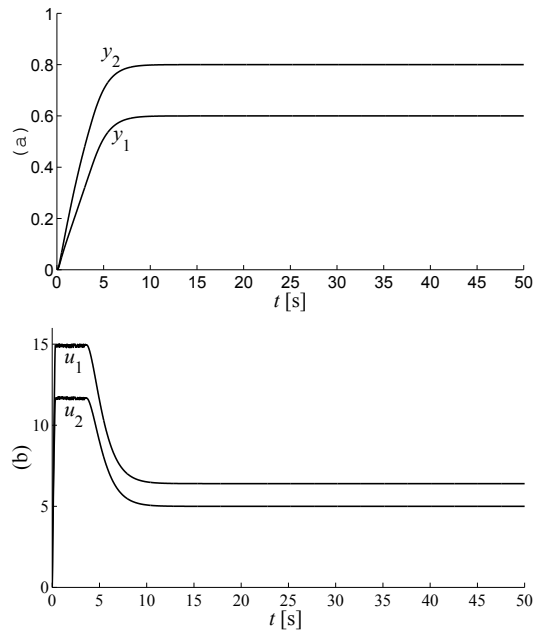


Figure 6.8: Corrección del cambio de dirección del control por un régimen deslizante. a) Variables controladas. b) Entradas a la planta.



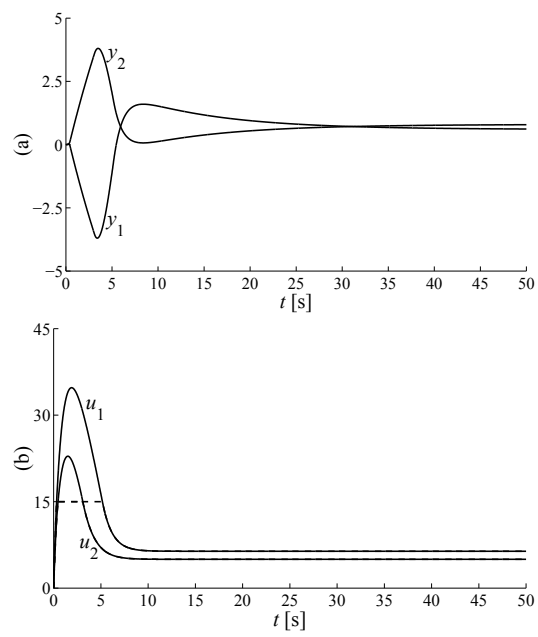


Figure 6.9: a) Variables controladas con filtrado de referencia, sin corrección por régimen deslizando. b) Entradas a la planta.



# 7

## MD EN SISTEMAS MIMO

### 7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo veremos como se pueden aplicar los conceptos de control por MD en sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). Es decir en sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A \in R^{n \times n} \\ B \in R^{n \times m} \\ C \in R^{m \times n} \\ x \in R^n \\ u \in R^m \\ y \in R^m \end{cases} \quad (7.1)$$

La figura 7.1 muestra el esquema de control por MD para un sistema MIMO. Cada acción de control  $u_i$  queda definida a partir del signo de una función de conmutación  $s_i(x)$

$$\begin{aligned} s_1(x) &= r_1 - k_{11}x_1 - k_{12}x_2 - k_{13}x_3 - \cdots - k_{1n}x_n = r_1 - k_1x \\ s_2(x) &= r_2 - k_{21}x_1 - k_{22}x_2 - k_{23}x_3 - \cdots - k_{2n}x_n = r_2 - k_2x \\ s_3(x) &= r_3 - k_{31}x_1 - k_{32}x_2 - k_{33}x_3 - \cdots - k_{3n}x_n = r_3 - k_3x \\ &\vdots \\ s_m(x) &= r_m - k_{m1}x_1 - k_{m2}x_2 - k_{m3}x_3 - \cdots - k_{mn}x_n = r_m - k_mx \end{aligned} \quad (7.2)$$

Estas funciones, al ser igualadas a cero, definen  $m$  superficies de control que agruparemos en un vector  $s(x) = 0$

$$s(x) = \begin{bmatrix} s_1(x) = 0 & s_2(x) = 0 & \cdots & s_m(x) = 0 \end{bmatrix}^T = R - Kx = 0_{n \times 1} \quad (7.3)$$

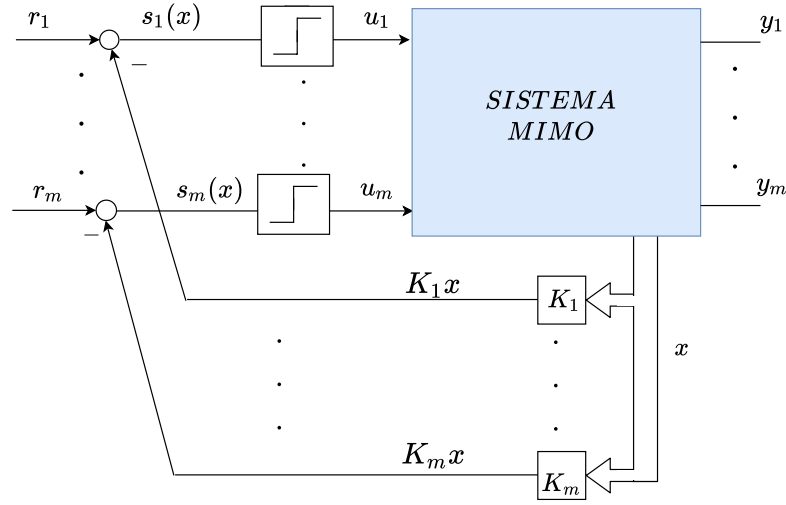


Figure 7.1: Control por MD de sistema MIMO

con <sup>1</sup>

$$R = [ r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_m ]^T \quad (7.4)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Si bien los estados pueden operar en MD sobre una superficie individual  $s_i(x) = 0$ , el objetivo en sistemas MIMO es la operación en la intersección de todas las superficies

$$s_1(x) \cap s_2(x) \cap s_3(x) \cap \cdots \cap s_m(x) = 0. \quad (7.6)$$

Cuando se dé esta condición diremos que el sistema MIMO opera en MD.

## 7.2 MODO ALCANCE EN SISTEMAS MIMO

A través de algunos ejemplos analizaremos algunas particularidades del MA en sistemas MIMO. Pero previamente a estos ejemplos MIMO, planteamos

<sup>1</sup>Por simplicidad, emplearemos indistintamente la notación 0 en lugar  $0_{k \times i}$ , entendiendo que las dimensiones son consistentes con las dimensiones de las otras matrices.

un caso SISO, que nos ayudará a resolver más rápidamente los ejemplos posteriores.

**Ejemplo introductorio SISO.** Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}\tag{7.7}$$

donde  $u$  es una señal discontinua

$$u = M \operatorname{sig}(s(x)),\tag{7.8}$$

es decir, que toma los valores

$$\begin{aligned}u &= u^- = -M & \text{si } & s(x) < 0 \\ u &= u^+ = +M & \text{si } & s(x) > 0\end{aligned}\tag{7.9}$$

siendo

$$s(x) = r - x_1 - 3x_2.\tag{7.10}$$

Nos interesa calcular el signo y la amplitud de  $M$  para garantizar el alcance de la superficie  $s(x) = 0$ .

Como ya hemos discutido, en sistemas SISO es condición necesaria y suficiente para alcanzar la superficie que

$$\begin{aligned}\text{si } s(x) > 0 & \Rightarrow \dot{s}(x) < 0 \\ \text{si } s(x) < 0 & \Rightarrow \dot{s}(x) > 0.\end{aligned}\tag{7.11}$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned}s(x) &= r - x_1 - 3x_2 \\ \dot{s}(x) &= \dot{r} - \dot{x}_1 - 3\dot{x}_2 = \dot{r} + x_1 - x_2 - 3u.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Luego, si  $s(x) > 0$  debe verificarse

$$\dot{s}(x) = \dot{r} + x_1 - x_2 - 3u^+ < 0,\tag{7.13}$$

es decir que

$$\begin{aligned}u^+ &= M \underbrace{\operatorname{sig}(s(x))}_{+1} > \frac{1}{3}(\dot{r} + x_1 - x_2) \\ M &> \frac{1}{3}(\dot{r} + x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{7.14}$$

A su vez, si  $s(x) < 0$ , debe cumplirse

$$\dot{s}(x) = \dot{r} + x_1 - x_2 - 3 u^- > 0 \quad (7.15)$$

y, por consiguiente, que

$$\begin{aligned} u^- &= M \underbrace{\text{sig}(s(x))}_{-1} < \frac{1}{3}(\dot{r} + x_1 - x_2) \\ -M &< \frac{1}{3}(\dot{r} + x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (7.16)$$

A partir de las ecuaciones (7.14) y (7.16) podemos determinar la amplitud que debe tener  $M$  para garantizar el modo alcance.

Es interesante preguntarse qué hubiera sucedido si  $s(x)$  hubiese tenido el signo contrario, es decir

$$s(x) = -r + x_1 + 3x_2. \quad (7.17)$$

Note que si bien el signo de  $s(x)$  ha cambiado, la superficie de MD definida por  $s(x) = 0$  sigue siendo la misma.

Nuevamente, para evaluar el MA, tenemos que mirar los signos de  $s(x)$  y su derivada  $\dot{s}(x)$

$$\begin{aligned} s(x) &= -r + x_1 + 3x_2 \\ \dot{s}(x) &= -\dot{r} + \dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 = -\dot{r} - x_1 + x_2 \uparrow 3 u \end{aligned} \quad (7.18)$$

siendo importante prestar atención al signo del término en que aparece la acción de control. Las condiciones (7.11) ahora quedan

$$\text{si } s(x) > 0 \Rightarrow u = u^+ \Rightarrow \dot{s}(x) = -\dot{r} - x_1 + x_2 \uparrow 3 u^+ < 0 \quad (7.19)$$

$$\text{si } s(x) < 0 \Rightarrow u = u^- \Rightarrow \dot{s}(x) = -\dot{r} - x_1 + x_2 \uparrow 3 u^- > 0, \quad (7.20)$$

pudiéndose ver que el signo supuesto en (7.8) no contribuye a garantizar el

MA debido al signo con que aparece  $u$  en  $\dot{s}(x)$ . Por el contrario, una acción de control

$$u = -M \operatorname{sig}(s(x)) \quad (7.21)$$

si lo hace.

Luego, si se cambia el signo de la superficie, deberíamos cambiar el signo de la acción de control. El signo del término en que aparece la acción de control en la derivada de  $s(x)$  (indicado con una flecha en (7.18)) es el que va a definir el signo de la acción de conmutación para garantizar el alcance de la superficie<sup>2</sup>. A su vez, la magnitud de  $M$  debe cumplir la desigualdad

$$-M < \frac{\dot{r} + x_1 - x_2}{3} < M. \quad (7.22)$$

para garantizar el MA.

**Ejemplo 1.** Consideremos ahora el sistema MIMO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u_1 + v_1 \\ \dot{x}_3 = u_2 + v_2 \end{cases} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad (7.23)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son perturbaciones y las variables controladas son  $x_1$  y  $x_3$ . Consideremos que, por especificaciones de respuesta dinámica, se quiere controlar al sistema en la intersección de las superficies

$$\begin{cases} s_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ s_2(x) = x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \quad (7.24)$$

En la figura 7.2 se han graficado las dos superficies en el espacio de estados y su intersección.

Una forma simple de llegar a la intersección

$$s_1(x) \cap s_2(x) = 0 \quad (7.25)$$

<sup>2</sup>Este es el hecho que queríamos remarcar con este ejemplo introductorio antes de ir al análisis de sistemas MIMO.

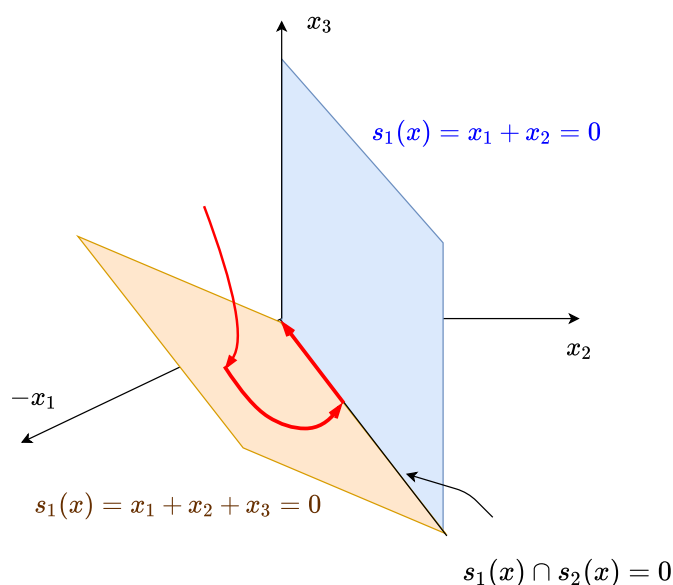


Figure 7.2: MA a partir de alcanzar superficies en forma individual

es ir alcanzando las superficies de a una (figura 7.2). Es decir, primero alcanzar una superficie y luego, operando en MD sobre ella, alcanzar la otra superficie. Entonces, para seguir este procedimiento, vemos que condiciones deben cumplirse para alcanzar primero la superficie  $s_1(x)$ .

Como

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(x) &= x_2 + x_3 + u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ \dot{s}_2(x) &= x_2 + x_3 + u_1 + v_1,\end{aligned}\tag{7.26}$$

tendría que verificarse que

$$si \quad s_1(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s}_1(x) = x_2 + x_3 + \underset{\uparrow}{u_1^+} + v_1 + u_2 + v_2 < 0.\tag{7.27}$$

Para esto, teniendo en cuenta el signo con que interviene  $u_1$  en la derivada de  $s_1$ , se debe elegir

$$u_1^+ = - \underset{\uparrow}{M_1} sig(s_1(x)),\tag{7.28}$$

donde



- considerando  $M_1$  positiva, debe incluirse el signo -
- $|M_1| > |x_2 + x_3 + u_2 + v_1 + v_2|$ .

Una vez garantizado el alcance y la posterior operación en MD sobre  $s_1(x)$ , veamos como alcanzar la superficie  $s_2(x)$  y, por consiguiente, la intersección de las dos superficies.

Como ya estamos operando en MD sobre  $s_1(x)$

$$s_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -x_1 - x_2. \quad (7.29)$$

La dependencia entre la señal  $x_3$  y los estados  $x_1$  y  $x_2$ , nos está indicando que el sistema ha perdido un estado. Su dinámica, sobre  $s_1(x)$ , es de segundo orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 + v_1 \end{cases} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1. \quad (7.30)$$

Luego, para alcanzar  $s_2(x)$ , tendría que verificarse que, si  $s_2(x) > 0$ , entonces

$$u_2 = u_2^+ \quad \Rightarrow \quad \dot{s}_2(x) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 - x_1 - x_2 + u_2^+ + v_1 < 0. \quad (7.31)$$

Para esto, teniendo en cuenta el signo con que interviene  $u_2$  en la derivada de  $s_1$ , es necesario que la acción de control

$$u_2^+ = - \underset{\uparrow}{M_2} \text{sig}(s_2(x)) \quad (7.32)$$

- incluya el signo menos indicado en (7.32), siempre considerando que  $M_2$  positiva,
- verifique que  $|M_2| > |-x_1 + v_1|$ .

La figura 7.3 muestra el lazo de control por MD MIMO. El análisis previo garantiza que, para el rango de trabajo requerido, el sistema alcanza la intersección de las superficies

**Ejemplo 2.** Continuando con el estudio del MA en sistemas MIMO, nos detendremos en una propiedad que es exclusiva de este tipo de sistemas. A través de un ejemplo, veremos que la intersección de las superficies se puede alcanzar sin necesidad que se cumpla la condición

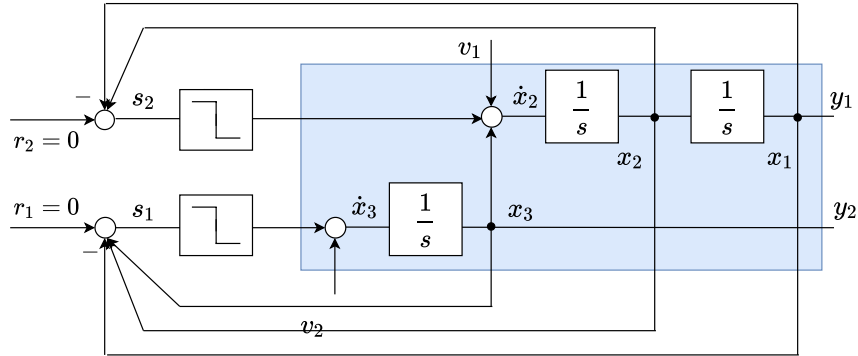


Figure 7.3: Control MIMO del ejemplo 1

$$s_i(x) \dot{s}_i(x) < 0, \quad (7.33)$$

que era necesaria y suficiente para sistemas SISO. La condición (7.33) pasa a ser sólo suficiente en sistemas MIMO.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_3 + u_1 - 2u_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 2u_1 + u_2 \end{cases} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u \quad (7.34)$$

y las superficies

$$\begin{cases} s_1(x) = x_1 + x_2 = 0 \\ s_2(x) = x_1 + x_3 = 0. \end{cases} \quad (7.35)$$

En este ejemplo, a diferencia del caso anterior, impondremos las acciones de control

$$\begin{cases} u_1 = -\text{sig}(s_1(x)) \\ u_2 = -\text{sig}(s_2(x)) \end{cases} \quad (7.36)$$

es decir  $M_1 = M_2 = 1$ . Luego

$$\begin{cases} \dot{s}_1(x) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{s}_2(x) = \dot{x}_1 + \dot{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{s}_1(x) = u_1 - 2u_2 \\ \dot{s}_2(x) = 2u_1 + u_2 \end{cases} \quad (7.37)$$

por consiguiente,

$$\begin{cases} \dot{s}_1(x) = -\text{sig}(s_1(x)) + 2\text{sig}(s_2(x)) \\ \dot{s}_2(x) = -2\text{sig}(s_1(x)) - \text{sig}(s_2(x)) \end{cases} \quad (7.38)$$

A partir de las expresiones de  $s(x)$  (7.35) y de sus derivadas (7.38), evaluemos el comportamiento del sistema (en realidad la evolución durante el MA) en el plano  $(s_2(x), s_1(x))$ . Para cada cuadrante, podemos calcular la velocidad de cambio de las  $s_i(x)$  con las expresiones (7.38) (ver Tabla 1).

Tabla 1

Cuadrante	$s_1(x)$	$s_2(x)$	$\dot{s}_1(x)$	$\dot{s}_2(x)$
I	$>0$	$>0$	1	-3
II	$>0$	$<0$	-3	-1
III	$<0$	$<0$	-1	3
IV	$<0$	$>0$	3	1

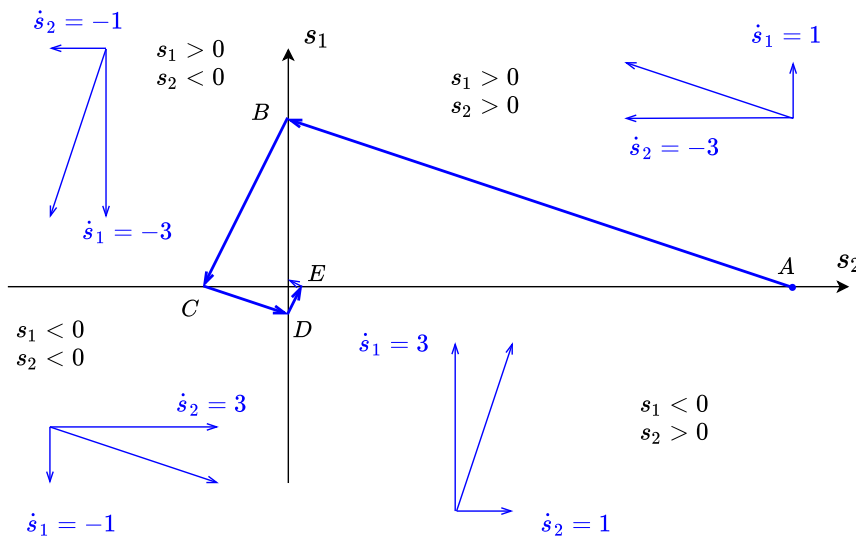


Figure 7.4: Modo Alcance directo sobre la intersección de las superficies

En la figura 7.4 se muestra la evolución de las  $s_i(x)$  a partir de una condición inicial  $(a,0)$ . Note que en los cuadrantes I y III no se verifica que

$$s_1(x) \dot{s}_1(x) < 0. \quad (7.39)$$

**Pregunta:** ¿se alcanza la intersección de las superficies?

Del gráfico no pareciera que esto pueda suceder en tiempo finito, que es lo que necesitamos para poder hablar de MD. **Pero**, en realidad, sí lo hace en tiempo finito (nuevamente, la respuesta está en las paradojas de nuestro amigo Zenon). Veamos que esto es realmente así. Calculemos los tiempos involucrados en cada tramo de la trayectoria de la figura 7.4 y sumémoslos.

Primero calculamos el tiempo de ir del punto  $A = (a,0)$  al punto  $B = (0,b)$ . Como la velocidad de cambio en la dirección de  $s_2(x)$  es constante (-3) en este tramo de la trayectoria

$$t_{A-B} = \frac{-a}{\dot{s}_2} = \frac{a}{3}. \quad (7.40)$$

Durante este tiempo, también la velocidad de cambio de  $s_2(x)$  es constante (+1). Luego la ordenada del punto  $B = (0,b)$  resulta

$$b = \dot{s}_1 t_{A-B} = \frac{a}{3}. \quad (7.41)$$

Calculamos ahora el tiempo de ir del punto  $B = (0,b)$  al punto  $C = (c,0)$ . En el tramo de trayectoria entre estos puntos (segundo cuadrante) la velocidad de cambio en la dirección de  $s_1(x)$  es constante (-3), luego el tiempo  $t_{B-C}$  es

$$t_{B-C} = \frac{-b}{\dot{s}_1} = -\frac{a}{3} \left( \frac{1}{-3} \right) = \frac{a}{9}, \quad (7.42)$$

y la abscisa del punto  $C=(0,c)$  resulta

$$c = \underbrace{\dot{s}_2}_{-1} t_{B-C} = -\frac{a}{9}. \quad (7.43)$$

Si se reitera este cálculo para los próximos tramos de la trayectoria, se encuentra

$$\begin{aligned} t_{C-D} &= \frac{a}{27} & D &= (0,d) = (0, -\frac{a}{27}) \\ t_{D-E} &= \frac{a}{81} & E &= (e,0) = (\frac{a}{81}, 0) \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{aligned} \quad (7.44)$$

Así, el tiempo para alcanzar la intersección de las superficies es

$$\begin{aligned}
t_{MA} &= t_{A-B} + t_{B-C} + t_{C-D} + t_{D-E} + \dots = \frac{a}{3} + \frac{a}{9} + \frac{a}{27} + \frac{a}{81} + \dots \\
\Rightarrow \quad t_{MA} &= \frac{a}{3} \left( \frac{1}{1-(1/3)} \right) = \frac{a}{2} \quad !!!
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Es decir, se alcanza la intersección de las superficies en tiempo finito (sin entrar previamente en MD en ninguna de ellas). A partir de este instante el sistema MIMO podría operar en MD. Esto confirma lo que ya hemos comentado previamente, que en sistemas MIMO, la condición (7.32) es suficiente pero no necesaria, ya que hemos podido alcanzar la intersección de las superficies sin que ésta se cumpla.

**Ejemplo 3.** Consideremos nuevamente el sistema del ejemplo previo y veamos que, al igual que en el caso SISO, el criterio de Lyapunov da pautas que permiten garantizar el MA.

Para aplicar Lyapunov, elegimos una función candidata definida positiva

$$V = |s_1(x)| + |s_2(x)|, \tag{7.46}$$

con derivada

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} \dot{s}_2 \\
\dot{V} &= \text{sig}(s_1)(-\text{sig}(s_1) + 2\text{sig}(s_2)) + \text{sig}(s_2)(-2\text{sig}(s_1) - \text{sig}(s_2)) \quad (7.47) \\
\dot{V} &= -2.
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que las  $d|s_i(x)|/ds_i(x) = \text{sig}(s_i(x))$  (figura 7.5).

Luego, como la derivada  $\dot{V}$  es negativa, queda garantizada la convergencia a  $(s_1, s_2) = (0, 0)$ , es decir, el modo alcance.

**Ejemplo 4.** Sin lugar a dudas, el criterio de Lyapunov es un excelente aliado al momento de garantizar las condiciones para el MA. Sin embargo hay que ser cuidadoso con su interpretación en el contexto de la teoría de los sistemas de control por MD. Consideremos el sistema

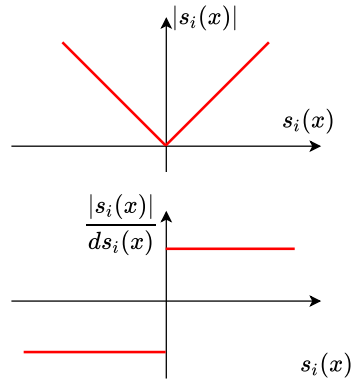


Figure 7.5: Función módulo y su derivada

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_3 + 2u_1 + u_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 2u_1 - u_2 \end{cases} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} u \quad (7.48)$$

con

$$\begin{cases} u_1 = -sig(s_1(x)) \\ u_2 = -sig(s_2(x)) \end{cases}, \quad (7.49)$$

y las superficies

$$\begin{cases} s_1(x) = x_1 + x_2 = 0 \\ s_2(x) = x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (7.50)$$

Luego

$$\begin{cases} \dot{s}_1(x) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{s}_2(x) = \dot{x}_1 + \dot{x}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{s}_1(x) = -2sig(s_1(x)) - sig(s_2(x)) \\ \dot{s}_2(x) = -2sig(s_1(x)) + sig(s_2(x)) \end{cases} \quad (7.51)$$

Proponiendo la función definida positiva

$$V = 4|s_1(x)| + |s_2(x)| \quad (7.52)$$

como candidata a función de Lyapunov, resulta que

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 4 \frac{\partial V}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} \dot{s}_2 \\
\dot{V} &= 4 \operatorname{sig}(s_1)(-2\operatorname{sig}(s_1) - \operatorname{sig}(s_2)) + \operatorname{sig}(s_2)(-2\operatorname{sig}(s_1) + \operatorname{sig}(s_2)) \\
\dot{V} &= -7 - 6 \operatorname{sig}(s_1)\operatorname{sig}(s_2) < 0
\end{aligned} \tag{7.53}$$

A primera vista, este resultado parecería indicar que se va a alcanzar la intersección de las superficies. Sin embargo, NO ES ASÍ.

La respuesta a esta aparente contradicción es que en la búsqueda de la intersección de las superficies, el sistema comienza a operar en MD en una de ellas. Al hacerlo, cambia de dinámica. De hecho se pierde un estado por estar operando en MD sobre una de las superficies. A partir de ese momento las ecuaciones de estado dejan de ser las (7.48) (las ecuaciones que nos llevaron a la conclusión errónea).

En la figura 7.6 se grafican las curvas de nivel de  $V$  en el espacio  $(s_1, s_2)$  y puede verse que las trayectorias las cruzan en la dirección en que  $V$  disminuye. Sin embargo, una vez que entran en  $s_1(x) = 0$ , el sistema cambia y las trayectorias se apartan del origen buscado ( $V$  crece). La intersección de superficies nunca es alcanzada.

### 7.2.1 Condición de existencia para un régimen deslizante sobre la intersección de las superficies

Como se ha visto, para alcanzar la intersección de las superficies no es necesario que se cumpla la condición

$$s_i(x) \dot{s}_i(x) < 0 \tag{7.54}$$

en cada una de las superficies  $s_i(x)$  en forma individual.

Las condiciones de existencia de MD en sistemas MIMO pueden ser formuladas en términos de la Teoría de Lyapunov. Particularmente se ha demostrado que si la derivada de la función de conmutación puede expresarse como

$$\dot{s}(x) = d(x) - D(x) \operatorname{sig}(s) \tag{7.55}$$

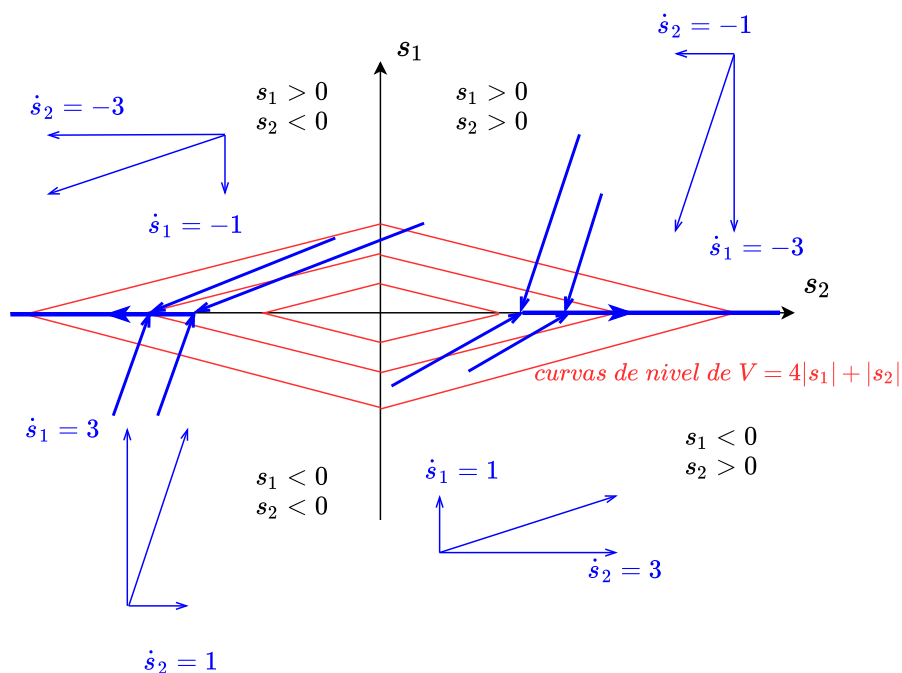


Figure 7.6: Comportamiento inestable que impide alcanzar la intersección de las superficies

Entonces una condición para la convergencia a la superficie  $s_1(x) \cap s_2(x) \cap \dots \cap s_n(x) = 0$  en tiempo finito es:

- $D(x)$  debe ser definida positiva, es decir

$$D(x) + D^T(x) > 0 \quad (7.56)$$

- 

$$\|d(x)\| < d_0 < \frac{\lambda_0}{\sqrt{m}} \quad \text{con} \quad \lambda_{\min} > \lambda_0 > 0 \quad (7.57)$$

donde  $d_0$  es una cota superior de  $\|d(x)\|$  y  $\lambda_{\min}$  es el mínimo autovalor de

$$\frac{1}{2}(D(x) + D^T(x)) . \quad (7.58)$$



**Expresiones de  $d(x)$  y  $D(x)$ .** Siempre considerando sistemas lineales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7.59)$$

podemos calcular las expresiones de  $d(x)$  y  $D(x)$ .

Siendo las funciones de conmutación

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(x) = r_1 - k_1x \\ s_2(x) = r_2 - k_2x \\ s_3(x) = r_3 - k_3x \\ \vdots \\ s_m(x) = r_m - k_mx \end{array} \right. \quad s(x) = \begin{bmatrix} s_1(x) & s_2(x) & \cdots & s_m(x) \end{bmatrix}^T = R - Kx \quad (7.60)$$

resulta

$$\begin{aligned} \dot{s}(x) &= \begin{bmatrix} \dot{s}_1(x) & \dot{s}_2(x) & \cdots & \dot{s}_m(x) \end{bmatrix}^T = \dot{R} - K\dot{x} \\ \dot{s}(x) &= \dot{R} - KAx - KBu \end{aligned} \quad (7.61)$$

considerando que  $u^+$  no es necesariamente igual a  $u^-$ , la señal discontinua  $u$  puede expresarse como

$$u(t) = \underbrace{\frac{u^+ + u^-}{2}}_{U_0} + \underbrace{\frac{u^+ - u^-}{2}}_{U_p} \text{sig}(s(x)) = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1p} \text{sig}(s_1) \\ u_{2p} \text{sig}(s_2) \\ \vdots \\ u_{np} \text{sig}(s_n) \end{bmatrix}. \quad (7.62)$$

Luego

$$\dot{s}(x) = \underbrace{\dot{R} - KAx - KBU_0}_{d(x)} - \underbrace{KBU_p}_{D(x)} \text{sig}(s) \quad (7.63)$$

donde podemos identificar tanto  $d(x)$  como  $D(x)$  presentes en (7.55).

**Ejemplo 5.** Verifiquemos si la matriz  $D(x)$  cumple la condición (7.56) en cada uno de los ejemplos MIMO vistos en este capítulo

-  $D(x)$  para el ejemplo 2

$$\dot{s}(x) = \cdots - \underbrace{KBU_p}_{D(x)} sig(s) = \cdots - \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix} sig(s) \quad (7.64)$$

-  $D(x)$  para los ejemplos 3 y 4

$$\dot{s}(x) = \cdots - \underbrace{KBU_p}_{D(x)} sig(s) = \cdots - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} sig(s) \quad (7.65)$$

-  $D(x)$  para el ejemplo 5

$$\dot{s}(x) = \cdots - \underbrace{KBU_p}_{D(x)} sig(s) = \cdots - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} sig(s) \quad (7.66)$$

En coincidencia con lo ya visto, las matrices  $D(x)$  de los ejemplos 2, 3 y 4 nos dicen que el MA y MD son posibles (habría que verificar la otra condición (7.56)). Con respecto al ejemplo 5, la matriz  $D(x)$  no es definida positiva y por consiguiente no se alcanzará la intersección de superficies.

### 7.3 Dinámica de MD en sistemas MIMO

Consideremos nuevamente la expresión general de sistemas MIMO lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_v v \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A \in R^{n \times n} \\ B \in R^{n \times p} \\ B_v \in R^{n \times p} \\ C \in R^{p \times n} \\ x \in R^n \\ u \in R^p \\ y \in R^p \end{cases} \quad (7.67)$$

con  $p$  acciones de control discontinuas, cuyos valores dependen de los signos de las funciones  $s_i(x)$

$$s(x) = \begin{bmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ s_3(x) \\ \vdots \\ s_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} x, \quad (7.68)$$

que al igualadas a cero se corresponden con las superficies  $s_i(x) = 0$

$$\begin{aligned} s(x) &= \begin{bmatrix} s_1(x) = 0 & s_2(x) = 0 & \cdots & s_n(x) = 0 \end{bmatrix}^T \\ &= R - Kx = 0. \end{aligned} \quad (7.69)$$

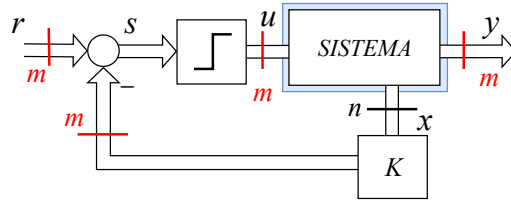


Figure 7.7: Esquema de control por MD MIMO

Si el sistema opera en MD en la intersección de todas las superficies

$$s_1(x) \cap s_2(x) \cap s_3(x) \cap \cdots \cap s_m(x) = 0 \quad (7.70)$$

se verifica la condición de invarianza

$$\begin{aligned} s(x) &= \begin{bmatrix} s_1(x) & s_2(x) & \cdots & s_n(x) \end{bmatrix}^T = R - Kx = 0_{n \times 1} \\ \dot{s}(x) &= \begin{bmatrix} \dot{s}_1(x) & \dot{s}_2(x) & \cdots & \dot{s}_n(x) \end{bmatrix}^T = \dot{R} - K\dot{x} = 0_{n \times 1}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Luego

$$\dot{s}(x) = \dot{R} - KAx - KBu_{eq} - KB_v v = 0_{n \times 1}, \quad (7.72)$$

siendo

$$u_{eq} = \begin{bmatrix} u_{1eq} \\ u_{2eq} \\ \vdots \\ u_{meq} \end{bmatrix} = (KB)^{-1}(\dot{R} - KAx - KB_v v). \quad (7.73)$$

Como en sistemas SISO, en sistemas MIMO, el control equivalente es útil para determinar en forma simple la dinámica de lazo cerrado (en particular la estabilidad). Efectivamente, reemplazando (7.73) en (7.67)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(KB)^{-1}(\dot{R} - KAx - KB_vv) + B_vv \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (7.74)$$

el modelo de lazo cerrado resulta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underbrace{(I - B(KB)^{-1}K)A}_{A_{LC}}x + \underbrace{(I - B(KB)^{-1}K)B_v}_{B_{vLC}}v + \underbrace{B(KB)^{-1}}_{B_{\dot{R}}}\dot{R} \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (7.75)$$

donde, las matrices del modelo de LC son

$$\begin{aligned}A_{LC} &= (I - B(KB)^{-1}K)A \\ B_{vLC} &= (I - B(KB)^{-1}K)B_v \\ B_{\dot{R}} &= B(KB)^{-1}.\end{aligned}\quad (7.76)$$

Como era de esperar la única diferencia en las expresiones (7.76) con respecto a las del caso SISO, es la dimensión de las matrices.

## 7.4 Orden del sistema MIMO operando en MD

Verifiquemos ahora la reducción del orden del sistema MIMO al operar en MD. Para esto expresemos las matrices del sistema de lazo abierto (7.67) y la superficie de control(7.69) en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_b \end{bmatrix}u \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (7.77)$$

$$s(x) = R - Kx = R - \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix}x \quad (7.78)$$

con

$$\begin{aligned}
A_{aa} &\in R^{(n-m)\times(n-m)} \\
A_{ab} &\in R^{(n-m)\times m} \\
A_{ba} &\in R^{m\times(n-m)} \\
A_{bb} &\in R^{m\times m} \\
B_b &\in R^{m\times m} \\
K_a &\in R^{m\times(n-m)} \\
K_b &\in R^{m\times m}.
\end{aligned} \tag{7.79}$$

Note que, siendo el sistema controlable, siempre es posible llevarlo a esta forma.

Luego, si reemplazamos la ecuación (7.77) en la expresión genérica de la matriz de lazo cerrado  $A_{LC}$  (ecuación (7.76) y realizamos algunos pasos algebraicos básicos

$$\begin{aligned}
A_{LC} &= (I_{n\times n} - B(KB)^{-1}K)A \\
A_{LC} &= (I_{n\times n} - \begin{bmatrix} 0 \\ B_b \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_b \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix})A \\
A_{LC} &= (I_{n\times n} - \begin{bmatrix} I_{(n-m)\times(n-m)} & 0_{(n-m)\times m} \\ -K_b^{-1}K_a & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix})
\end{aligned} \tag{7.80}$$

obtenemos la expresión

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ -K_b^{-1}K_a A_{ba} & -K_b^{-1}K_a A_{bb} \end{bmatrix} \tag{7.81}$$

donde se puede ver que las últimas  $m$  filas son linealmente dependientes de las primeras  $n - m$ . Esto nos está diciendo que el modelo de lazo cerrado (7.75) está sobredimensionado en  $m$  estados!!!!

En otras palabras, al alcanzar el MD el sistema ha perdido  $m$  estados presentando una dinámica de orden reducido. Para calcular los autovalores de LC, podemos calcular las raíces del polinomio

$$|sI - A_{LC}| = 0 \tag{7.82}$$

$$\Rightarrow |sI - A_{LC}| = \begin{bmatrix} sI_{(n-m)\times(n-m)} - A_{aa} & -A_{ab} \\ K_b^{-1}K_a A_{ba} & sI_{m\times m} + K_b^{-1}K_a A_{bb} \end{bmatrix} = 0. \tag{7.83}$$

Multiplicando la “primer fila” por

$$K_b^{-1}K_a, \quad (7.84)$$

sumándole la “segunda fila” al resultado y reemplazando la “segunda fila”, resulta

$$|sI - A_{LC}| = \begin{bmatrix} sI_{(n-m) \times (n-m)} - A_{aa} & -A_{ab} \\ sK_b^{-1}K_a & sI_{m \times m} \end{bmatrix} = 0. \quad (7.85)$$

Si ahora multiplicamos la “segunda columna” por (7.84), le sumamos el resultado a la primera columna y reemplazamos la primera columna, obtenemos

$$|sI - A_{LC}| = \begin{bmatrix} sI_{(n-m) \times (n-m)} - A_{aa} + K_b^{-1}K_aA_{ab} & -A_{ab} \\ 0_{m \times (n-m)} & sI_{m \times m} \end{bmatrix} = 0$$

$$|sI - A_{LC}| = s^m |sI_{(n-m) \times (n-m)} - A_{aa} + K_b^{-1}K_aA_{ab}| = 0, \quad (7.86)$$

donde podemos distinguir el primer factor  $s^m$  que corresponde a  $m$  raíces en el origen sin significado físico y el polinomio que realmente va a definir la dinámica de lazo cerrado

$$|sI_{(n-m) \times (n-m)} - A_{aa} + K_b^{-1}K_aA_{ab}| = 0. \quad (7.87)$$

## 7.5 Asignación de autovalores

El diseño de un control por MD MIMO por asignación de autovalores se reduce, al igual que para el caso SISO, a un problema algebraico para el cálculo de las ganancias de las superficies  $s_i(x)$ . La solución se obtiene de igualar los coeficientes del polinomio (7.87) con los coeficientes del polinomio característico deseado, obteniéndose así  $n - m$  ecuaciones a partir de las cuales pueden despejarse las ganancias. Luego, sólo haremos un par de

comentarios. Podemos notar a partir de (7.87), que

- pueden asignarse los  $(n - m)$  autovalores de lazo cerrado eligiendo las ganancias  $K_a$  y  $K_b$ . Esto no difiere significativamente del caso SISO. De todas maneras, debe tenerse presente que la asignación de polos en sistemas MIMO no tiene una correspondencia tan directa con la respuesta temporal como sucede en el caso SISO. Aún así define la dinámica y en particular la estabilidad

- al asignar autovalores nos encontramos con que van a existir  $m \times m$  grados de libertad para la elección de las  $n \times m$  ganancias de  $K$ .

Además, es importante notar que el sistema operando en MD va a presentar una dinámica completamente robusta a los componentes  $A_{ba}$  y  $A_{ab}$  que resulten de cambios en los parámetros del sistema.

## 7.6 Ejemplo

Analicemos, en el contexto de los regímenes por MD, el control de un filtro activo (FA) para la corrección del factor de potencia en sistemas eléctricos con cargas no lineales.

Las cargas no lineales en sistemas eléctricos producen armónicos que generan numerosos inconvenientes tanto en los sistemas de generación como en las redes y cargas. Una forma convencional de compensar los armónicos es empleando filtros activos. La figura 7.8 esquematiza la compensación de los armónicos producidos por una carga no lineal  $Z_{NL}$ , donde, para evitar que los armónicos circulen por el generador  $v_G$  y la red  $L_g$ , se conecta en los terminales de la carga un filtro activo paralelo, el cual debe entregar las corrientes armónicas que demanda la carga. El filtro activo compensa los armónicos a partir del mismo concepto que se emplea en la compensación con capacitores de corrientes reactivas de cargas inductivas lineales (figura 7.8b). De hecho, el filtro activo es un compensador de corrientes reactivas, ya que los armónicos son corrientes reactivas en el sentido que cumplen con la condición

$$\int_0^T v i_n dt = 0. \quad (7.88)$$

Consideremos que la carga no lineal es un rectificador trifásico que alimenta una carga inductiva. La figura 7.9 muestra la carga no lineal conec-

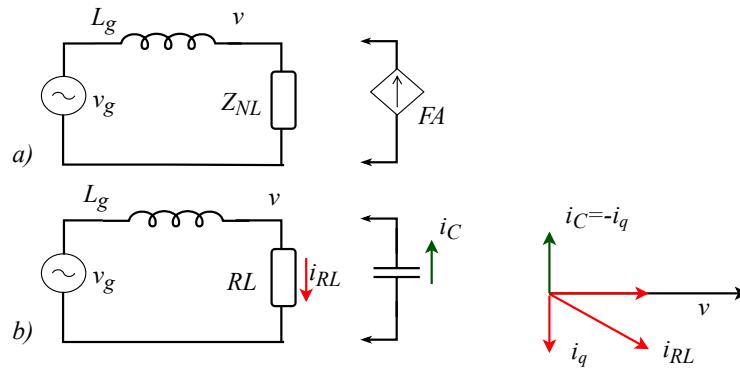


Figure 7.8: Compensación de reactivo: a) para carga no lineal, b) para carga lineal

tada a la red y, en paralelo, un filtro activo. Analicemos el control de las llaves del FA para que no circulen armónicos por la red.

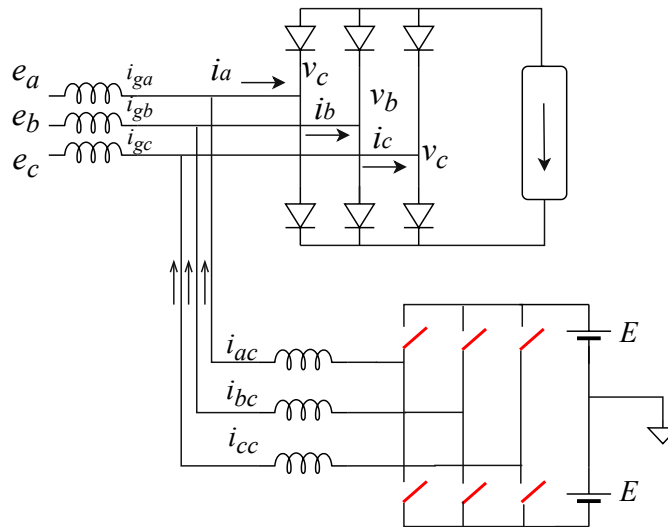


Figure 7.9: Compensación con FA paralelo de los armónicos generados por un rectificador trifásico

Podemos elegir las ecuaciones de estado del filtro activo como



$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \frac{1}{L_c}(-v_a + E u_a) \\ \dot{x}_b &= \frac{1}{L_c}(-v_b + E u_b) \\ \dot{x}_c &= \frac{1}{L_c}(-v_c + E u_c) \end{aligned} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{E}{L_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{L_c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{L_c} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \frac{v_a}{L_c} \\ \frac{v_b}{L_c} \\ \frac{v_c}{L_c} \end{bmatrix} \quad (7.89)$$

donde  $v_i$  son las tensiones en los puntos de conexión del FA, y los estados

$$x^T = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{ac} & i_{bc} & i_{cc} \end{bmatrix} \quad (7.90)$$

son las corrientes de compensación.

El objetivo de control es que las corrientes de red ( $i_{ag}, i_{bg}, i_{cg}$ ) sean sinusoidales, estén en fase con las tensiones de red

$$\begin{cases} v_a = \hat{V} \cos(\omega t + 60^\circ) \\ v_b = \hat{V} \cos(\omega t - 60^\circ) \\ v_c = \hat{V} \cos(\omega t + 180^\circ), \end{cases} \quad (7.91)$$

y aporten la potencia activa que demanda la carga. Es decir, que sus referencias deben ser de la forma

$$\begin{cases} I_{ga} = \hat{I} \cos(\omega t + 60^\circ) \\ I_{gb} = \hat{I} \cos(\omega t - 60^\circ) \\ i_{gc} = \hat{I} \cos(\omega t + 180^\circ). \end{cases} \quad (7.92)$$

Con esta finalidad, proponemos las siguientes superficies

$$s(x) = \begin{bmatrix} s_a(x) = I_{ga} - i_{ga} \\ s_b(x) = I_{gb} - i_{gb} \\ s_c(x) = I_{gc} - i_{gc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_a(x) = I_{ga} - i_a + i_{ac} \\ s_b(x) = I_{gb} - i_b + i_{bc} \\ s_c(x) = I_{gc} - i_c + i_{cc} \end{bmatrix}. \quad (7.93)$$

Luego, para obtener el control equivalente, derivamos (7.93)

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s(x)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial s(x)}{\partial t}$$

$$\dot{s}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{L_c} \begin{bmatrix} -v_a + E u_a \\ -v_b + E u_b \\ -v_c + E u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{I} \omega \text{sen}(\omega t + 60^\circ) \\ -\hat{I} \omega \text{sen}(\omega t - 60^\circ) \\ -\hat{I} \omega \text{sen}(\omega t + 180^\circ) \end{bmatrix}. \quad (7.94)$$

Note que al ser  $s(x)$  una función explícita del tiempo en (7.94) hay que incluir la derivada parcial con respecto a  $t$ . Reagrupando términos en (7.94)

$$\dot{s}(x) = \underbrace{\dots\dots}_{d(x)} - \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{E}{L_c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E}{L_c} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L_c} \end{bmatrix}}_{D(x)} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

vemos que  $D(x)$  es definida negativa. Luego, para alcanzar la intersección de las superficies debemos cambiar el signo de las funciones de conmutación o la polaridad de las baterías.

A partir del control equivalente, la condición suficiente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u^-} < u_{eq} = \begin{bmatrix} u_{1eq} = \hat{I} \omega \text{sen}(\omega t + 60^\circ) \\ u_{2eq} = \hat{I} \omega \text{sen}(\omega t - 60^\circ) \\ u_{3eq} = \hat{I} \omega \text{sen}(\omega t + 180^\circ) \end{bmatrix} \frac{L_c}{E} + \begin{bmatrix} \frac{v_a}{E} \\ \frac{v_b}{E} \\ \frac{v_c}{E} \end{bmatrix} < \underbrace{\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}}_{u^+} \quad (7.96)$$

nos permite dimensionar los componentes  $L_c$  y  $E$  del FA.

Con respecto a la dinámica en MD, evitaremos cálculos ante la solución obvia: el sistema es de tercer orden y en modo deslizante pierde tres autovalores. Luego, una vez que el sistema opera en MD, ya se encuentra en estado estacionario, entendiéndose por estado estacionario que una vez que el sistema opera en MD, los armónicos quedan completamente compensados.

Las figuras 7.10 muestran, en MD, las tensiones de la red, las corrientes de carga, las corrientes de compensación del FA y las corrientes de red que

están libres de armónicos.

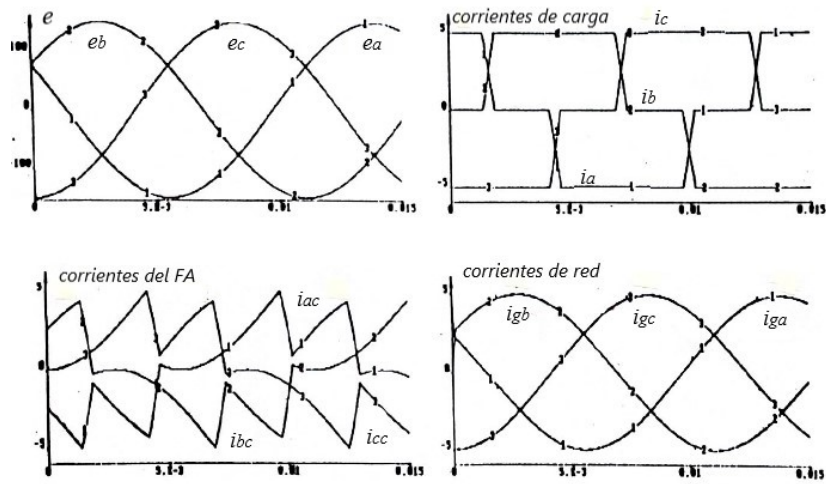


Figure 7.10: a) Tensiones de red, b) corrientes de carga, c) corrientes de compensación del FA y d) corrientes de red



## 8

# INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MD

## 8.1 Preliminares

En este capítulo plantearémos de manera más formal y rigurosa, conceptos que ya hemos discutido en capítulos previos. El enfoque geométrico que veremos es una herramienta sumamente útil para el análisis y control de sistemas no lineales en general, y particularmente para el diseño de controladores por MD. Obviamente, las ventajas de este enfoque van a hacerse significativas en la medida que el sistema presente mayor complejidad.

### 8.1.1 Derivada direccional

Para introducir el concepto de derivada direccional o derivada de Lie consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x).\end{aligned}\tag{8.1}$$

Como ya sabemos, la primera ecuación (diferencial) describe un campo vectorial en el espacio de estados. Para cada punto  $x_i$  de este espacio, corresponde un vector  $f(x_i) + g(x_i)u$  que define la velocidad de cambio de los estados y, por consiguiente, la dirección de la trayectoria con la que éstos evolucionan. La segunda ecuación, corresponde a una función (o campo) escalar que nos dice cual es el valor de la salida  $y = h(x)$  para cada punto de la trayectoria. En la figura 8.1 se representa el campo vectorial (plano horizontal) y la función escalar para un sistema de segundo orden.

En particular, si nos interesa la velocidad de cambio de la salida  $y(t) = h(x(t))$ , debemos evaluarla en la dirección que va definiendo esta trayectoria. Esta velocidad se conoce con el nombre de derivada direccional y suele

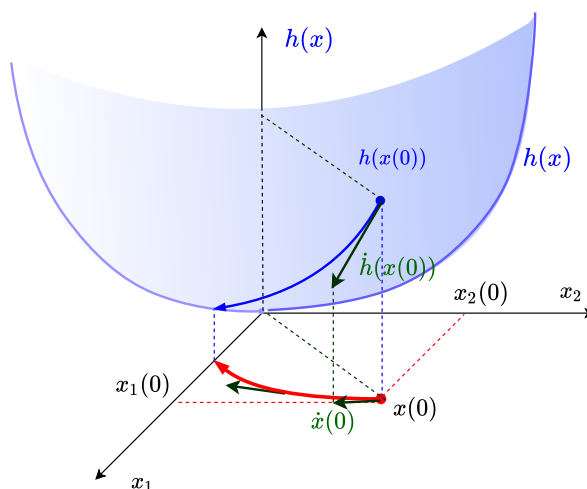


Figure 8.1: Interpretación de la derivada de Lie

expresarse de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dt} = L_{\dot{x}}h, \quad (8.2)$$

que debe leerse como la derivada direccional, o derivada de Lie, de la función  $h(x)$  en la dirección del campo  $\dot{x}$ .

Luego, las siguientes expresiones son equivalentes

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dh(x)}{dt} = \frac{dh(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \langle \nabla h(x) \cdot \dot{x} \rangle, \quad (8.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \langle \nabla h(x) \cdot \dot{x} \rangle = L_{\dot{x}}h(x), \quad (8.4)$$

$$L_{\dot{x}}h = L_{f+gu}h(x). \quad (8.5)$$

Como  $L_{\dot{x}}h(x)$  es una función escalar al igual que  $h(x)$ , también se puede derivar en la dirección de  $\dot{x}$

$$L_{\dot{x}}(L_{\dot{x}}h(x)) = L_{\dot{x}}^2h(x) = \langle \nabla L_{\dot{x}}h(x) \cdot \dot{x} \rangle. \quad (8.6)$$

De la misma forma podemos ir derivando sucesivamente  $k$  veces en la dirección de  $\dot{x}$

$$L_{\dot{x}}^k h(x) = L_{\dot{x}}(L_{\dot{x}}^{k-1} h(x)) = \langle \nabla L_{\dot{x}}^{k-1} h(x) \cdot \dot{x} \rangle. \quad (8.7)$$

**Nota.** Para introducir la derivada direccional hemos considerado que, en (8.1), la función a derivar  $h(x)$  es la salida  $y$  de nuestro sistema. De aquí en más, muchas veces la función que nos interesará derivar es la función  $s(x)$ , la cual también puede considerarse una salida del sistema.

### 8.1.2 Propiedades de la derivada direccional

La derivada direccional es una operación lineal, luego verifica las siguientes propiedades

- **Propiedad 1.** Si la dirección en la que se deriva una función se puede descomponer en dos o más componentes, la derivada puede calcularse como la suma de las derivadas en las nuevas componentes. En el caso que estamos analizando esta propiedad se refleja como

$$L_{f+gu}h(x) = L_f h(x) + L_{gu}h(x). \quad (8.8)$$

*Demostración*

$$L_{f+gu}h(x) = \langle \nabla h(x) \cdot f + gu \rangle = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 + g_1 u \\ f_2 + g_2 u \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

$$L_{f+gu}h(x) = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} g_1 u \\ g_2 u \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (8.10)$$

$$L_{f+gu}h(x) = L_f h(x) + L_{gu}h(x). \quad (8.11)$$

- **Propiedad 2.** Las derivadas de una función en la dirección de dos vectores que solo difieren en el módulo verifican que

$$L_{gu}h(x) = L_g h(x) \cdot u. \quad (8.12)$$

*Demostración*

$$L_{gu}h(x) = \langle \nabla h(x) \cdot gu \rangle = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} g_1 u \\ g_2 u \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (8.13)$$

$$L_{gu}h(x) = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{bmatrix} u, \quad (8.14)$$

$$L_{gu}h(x) = L_g h(x) u. \quad (8.15)$$

## 8.2 Descripción del MD via derivadas de Lie

Como ya hemos comentado, el diseño de un control por MD requiere de

- un modelo en variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (8.16)$$

- una superficie de control en la cual se cumplen las especificaciones  $s(x) = 0$
- una lógica de conmutación

$$si \quad s(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad u = u^+ \quad (8.17)$$

$$si \quad s(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad u = u^- \quad (8.18)$$

que garantice que

$$cuando \quad s(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(x) < 0 \quad (8.19)$$

$$cuando \quad s(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(x) > 0 \quad (8.20)$$

o lo que es equivalente en términos de la derivada de Lie

$$si \quad s(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad L_{f+gu^+} s(x) = L_f s(x) + u^+ L_g s(x) < 0 \quad (8.21)$$

$$si \quad s(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad L_{f+gu^-} s(x) = L_f s(x) + u^- L_g s(x) > 0 \quad (8.22)$$



### 8.2.1 Condición de transversalidad

Restando la expresiones (8.22) a (8.21)

$$L_f s(x) + u^+ L_g s(x) - L_f s(x) - u^- L_g s(x) < 0 \quad (8.23)$$

$$(u^+ - u^-) L_g s(x) < 0 \quad (8.24)$$

donde suponiendo

$$(u^+ - u^-) > 0, \quad (8.25)$$

encontramos que

$$L_g s(x) < 0. \quad (8.26)$$

es una condición necesaria para la existencia de un régimen deslizante, La desigualdad (8.26) se conoce como condición de transversalidad y teniendo en cuenta que

$$L_g s(x) = \langle \nabla s(x) \cdot g \rangle \quad (8.27)$$

tiene la interpretación geométrica que se muestra en la figura 8.2. Las proyecciones sobre un mismo eje del gradiente de  $s(x)$  y del vector  $g(x)$  en cuya dirección se aplica el control  $u$ , deben tener sentidos opuestos. Esto garantiza que, independientemente del lado de la superficie en que estemos, las trayectorias van a atravesar la superficie.

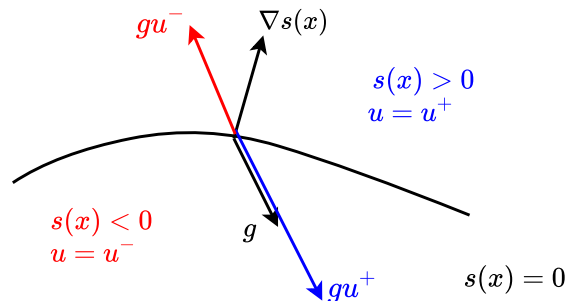


Figure 8.2: Interpretación geométrica de la condición de transversalidad

La condición de transversalidad  $L_g s(x) < 0$  dice a las claras que la salida  $y = h(x)$  es de grado relativo uno localmente. Esta condición es independiente de la naturaleza continua o discontinua de las acciones de control.

**Note** que si no se cumple que  $L_g s(x) = \langle \nabla s(x) \cdot g \rangle < 0$ , la cual surge a partir de la suposición (8.25), se puede cambiar el signo a  $s(x)$  o bien reemplazar  $u^+$  por  $u^-$ .

### 8.2.2 Control equivalente

A los efectos de encontrar el control equivalente en términos de la derivada direccional, nos valemos nuevamente de las condiciones de invarianza

$$\begin{cases} s(x) = 0 \\ \dot{s}(x) = L_f s(x) + u_{eq} L_g s(x) = 0. \end{cases} \quad (8.28)$$

Luego,

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} \quad (8.29)$$

y a partir de esta expresión podemos reescribir la condición necesaria y suficiente para garantizar la operación en MD sobre  $s(x) = 0$

$$u^- < u_{eq} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} < u^+, \quad (8.30)$$

de donde se desprende que para que el control equivalente  $u_{eq}$  exista

$$L_g s(x) \neq 0. \quad (8.31)$$

Note que la condición (8.31) coincide con la que hemos definido como condición de existencia en sistemas lineales  $KB \neq 0$ . Efectivamente, si consideramos el caso de sistemas lineales,

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{Ax}_{f(x)} + \underbrace{B}_{g(x)} u \\ y = Cx \end{cases} \quad (8.32)$$

con

$$s(x) = r - kx \quad (8.33)$$

el control equivalente resulta

$$u_{eq} = -\frac{\nabla s(x).f}{\nabla s(x).g} = -\frac{kAx}{kB} = -(kB)^{-1}kAx. \quad (8.34)$$

Luego, para que el control equivalente exista debe verificarse que

$$L_g s(x) = \nabla s(x).g = kB \neq 0. \quad (8.35)$$

### 8.3 Dinámica en MD

La dinámica de lazo cerrado del sistema operando en MD resulta de reemplazar la expresión del  $u_{eq}$  en las ecuaciones de lazo abierto  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \begin{pmatrix} -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} \end{pmatrix} \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (8.36)$$

Luego,

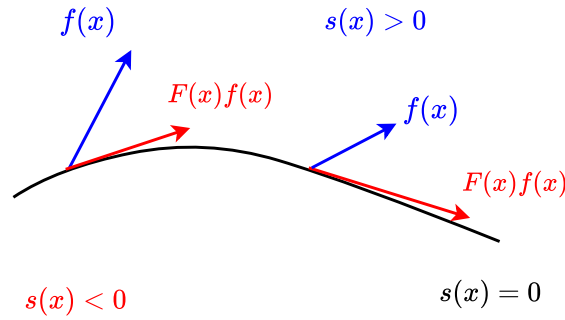
$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left( \frac{ds(x)}{dx}.g(x) \right)^{-1} \left( \frac{ds(x)}{dx}.f(x) \right) \quad (8.37)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \left( I - g(x) \left( \frac{ds(x)}{dx}.g(x) \right)^{-1} \frac{ds(x)}{dx} \right) f(x) \quad (8.38)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\left( I - g(x) \left( \frac{ds(x)}{dx}.g(x) \right)^{-1} \frac{ds(x)}{dx} \right)}_{F(x)} f(x) \quad (8.39)$$

donde  $F(x)$  puede ser visto como un operador que (en MD) cambia el módulo y el ángulo de  $f(x)$  para garantizar el desplazamiento de los estados sobre la superficie  $s(x)$

$$\dot{x} = F(x)f(x). \quad (8.40)$$

Figure 8.3: Interpretación geométrica del operador  $F(x)$ 

Con la interpretación previa de  $F(x)$ , surge la pregunta: ¿por qué  $F(x)$  sólo opera sobre  $f(x)$  y no sobre toda la ecuación de lazo abierto  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ?

La respuesta a esta pregunta es que  $F(x)$  sí opera sobre toda la ecuación de lazo abierto, sin embargo el término  $F(x)g(x)u$  no aparece en (8.39) porque es nulo. Para verificarlo consideremos:

$$F(x).g(x)a \quad (8.41)$$

donde  $a$  es un escalar. Luego

$$\left( I - g(x) \left( \frac{ds(x)}{dx} \cdot g(x) \right)^{-1} \frac{ds(x)}{dx} \right) \cdot g(x)a \quad (8.42)$$

$$\Rightarrow \left( I g(x) - g(x) \left( \frac{ds(x)}{dx} \cdot g(x) \right)^{-1} \frac{ds(x)}{dx} g(x) \right) a \quad (8.43)$$

$$\Rightarrow (g(x) - g(x)) a = 0 \quad (8.44)$$

$$\Rightarrow F(x) \cdot g(x)a = 0. \quad (8.45)$$

Luego, cualquier componente del campo vectorial en la dirección de  $g(x)$  (en realidad en el span de  $g(x)$ ) se transfiere en un vector de módulo nulo.  $F(x)$  transforma  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  tal que el campo vectorial a lazo cerrado

es tangencial a la superficie  $s(x)$ , haciendo que el MD perdure. La figura 8.4 muestra esta interpretación geométrica.

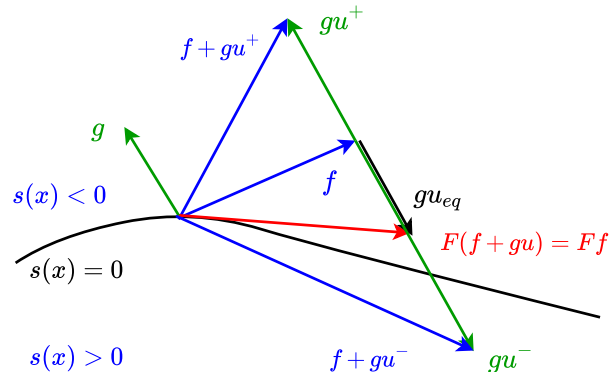


Figure 8.4: Interpretación geométrica del MD

*Expresión de  $F(x)$  en el caso lineal.* Si consideramos un sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{Ax}_{f(x)} + \underbrace{B}_{g(x)} u \\ y = Cx \end{cases} \quad (8.46)$$

con

$$s(x) = r - kx. \quad (8.47)$$

El operador  $F(x)$  resulta

$$F(x) = (I - B(kB)^{-1}k), \quad (8.48)$$

y vemos que la dinámica de lazo cerrado tiene por expresión a una vieja amiga

$$F(x) \cdot f = (I - B(kB)^{-1}k) Ax. \quad (8.49)$$

Efectivamente, (8.49) coincide con las expresiones que ya hemos obtenido para la dinámica de lazo cerrado (ver (2.70) y (2.71)).

## 8.4 Robustez del control por MD

Para evaluar como las perturbaciones o incertidumbres en los parametros pueden afectar el comportamiento a lazo cerrado, es decir la robustez del control por MD, consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + d \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{8.50}$$

donde el vector  $d$  contempla perturbaciones en los estados.

### 8.4.1 Control equivalente del sistema perturbado

Para calcular el control equivalente que permite que el sistema perturbado (8.50) viva en una superficie  $s(x) = 0$ , consideramos la condición de invariancia

$$\begin{cases} s(x) = 0 \\ \dot{s}(x) = L_{f+gu_{eq}+d}s(x) = L_f s(x) + u_{eq} L_g s(x) + L_d s(x) = 0, \end{cases}\tag{8.51}$$

y despejamos

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} - \frac{L_d s(x)}{L_g s(x)}.\tag{8.52}$$

Puede verse que el control equivalente del sistema perturbado difiere del correspondiente al sistema sin perturbar en el segundo término del segundo miembro de (8.52). Para analizar más en detalle cómo la perturbación afecta al control equivalente, podemos descomponer el vector de perturbaciones  $d$  en dos componentes

$$d = \eta + g\mu\tag{8.53}$$

donde la primer componente  $\eta$  es tangencial a la superficie y la componente  $g\mu$  (con  $\mu$  escalar) mantiene la dirección de  $g$  (figura 8.5).

Repitiendo el cálculo del control equivalente para el sistema perturbado

$$\begin{cases} s(x) = 0 \\ \dot{s}(x) = L_f s(x) + u_{eq} L_g s(x) + \underbrace{L_\eta s(x)}_0 + \mu L_g s(x) = 0 \end{cases}\tag{8.54}$$

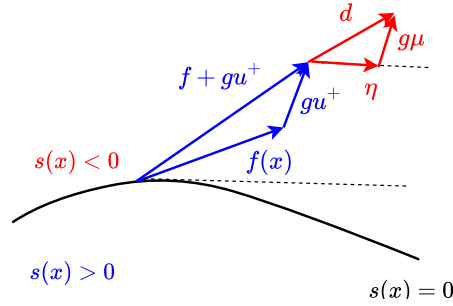


Figure 8.5: Descomposición de la perturbación

nos encontramos que

$$u_{eqd} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} - \mu = u_{eq} - \mu, \quad (8.55)$$

donde vemos que, para garantizar el MD del sistema perturbado, se requiere de un término adicional  $-\mu$  con respecto al control equivalente del sistema sin perturbar ( $-\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)}$ ). El signo del escalar  $\mu$  afecta necesariamente a uno de los límites de la acción de control.

Podemos concluir que,

- La componente  $\eta$  de la perturbación  $d$  en la dirección de la superficie no afecta al control equivalente
- La componente  $g\mu$  modifica el control equivalente (con respecto al del sistema no perturbado) en un factor  $\mu$ . Para que el modo deslizante se mantenga se requiere "más" acción de control. La condición necesaria y suficiente para que el sistema opere en MD, ahora es

$$u^- < -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} - \mu < u^+. \quad (8.56)$$

### 8.4.2 Respuesta de lazo cerrado del sistema perturbado

Para obtener la evolución dinámica de los estados, reemplazamos la expresión del control equivalente del sistema perturbado en las ecuaciones de lazo abierto (8.50)

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \left( -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} - \mu \right) + (\eta + g(x)\mu) \quad (8.57)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = f(x) + g(x) \left( \frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot g \right)^{-1} \frac{\partial s(x)}{\partial x} f(x) + \eta \quad (8.58)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \left( I + g(x) \left( \frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot g \right)^{-1} \frac{\partial s(x)}{\partial x} \right) f(x) + \eta \quad (8.59)$$

$$\Rightarrow F(x) = I + g(x) \left( \frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot g \right)^{-1} \frac{\partial s(x)}{\partial x} \quad (8.60)$$

Luego,

$$\dot{x} = F(x)f(x) + \eta. \quad (8.61)$$

En (8.61) vemos que

- en MD, los estados no son afectados por la componente de perturbación  $g\mu$ . Luego podemos decir que los controles por modos deslizantes presentan robustez fuerte a aquellas perturbaciones que pertenezcan al span de  $g$
- con respecto a las componentes de las perturbaciones tangentes a la superficie de control, vemos que si bien no comprometen el MD, si afectan a la evolución de los estados. Luego, diremos que el control por MD presenta robustez débil a las componentes de perturbación que sean tangentes a la superficie.

## 8.5 Robustez a incertidumbre en los parámetros

Lo visto en la sección previa para perturbaciones, puede extenderse al caso de incertidumbre o variación de parámetros en el sistema. Por simplicidad, lo evaluamos para el caso lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{Ax}_{f(x)} + \underbrace{B}_{g(x)} u \\ y = Cx. \end{cases} \quad (8.62)$$



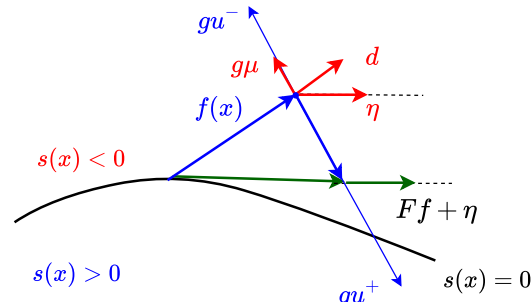


Figure 8.6: Interpretación geométrica de la robustez del MD a perturbaciones

Los cambios de parámetros en el sistema se pueden manifestar en la matriz  $A$  ó en  $B$ .

### Cambios en $B$

Supongamos que  $g(x) = B$  es de la forma

$$g(x) = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{8.63}$$

y que un cambio de parámetros del sistema se traduce en la siguiente modificación en  $B$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{cambia a} \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3^* \end{bmatrix}. \tag{8.64}$$

Podemos reescribir las ecuaciones del sistema como

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\text{sistema original}} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3^* - b_3 \end{bmatrix} u \tag{8.65}$$

donde vemos que el tercer término del segundo miembro de la igualdad (8.70), puede ser visto como una perturbación en la dirección de  $g(x)$ . Por consiguiente el MD rechazará totalmente esa perturbación. Un caso distinto

hubiera sido si el cambio de parámetros en  $B$ , no se puede expresar como una perturbación en el span de  $g(x)$ . Por ejemplo si

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{cambia a} \quad B^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ 0 \\ b_3^* \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

En ese caso, podríamos expresar a (8.61) como

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\text{sistema original}} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3^* - b_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} b_1^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (8.67)$$

donde vemos que el control presentará robustez fuerte a los cambios en  $b_3$ , y débil a los de  $b_1$ .

### Cambios en $A$

También serán totalmente rechazados los cambios que se manifiesten en  $f(x) = Ax$ , si estos pertenecen al span de  $g(x)$ .

Por ejemplo, si el sistema está en la forma canónica controlable

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} u \quad (8.68)$$

los cambios se manifestarán en los coeficientes de la última fila. Supongamos que el sistema cambia a

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1^* & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} u. \quad (8.69)$$

Este cambio, puede expresarse como una perturbación en la dirección de  $g(x)$  como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{g(x)} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (a_1 - a_1^*) x \end{bmatrix}}_{\text{perturbación en la dirección } g(x)} \quad (8.70)$$

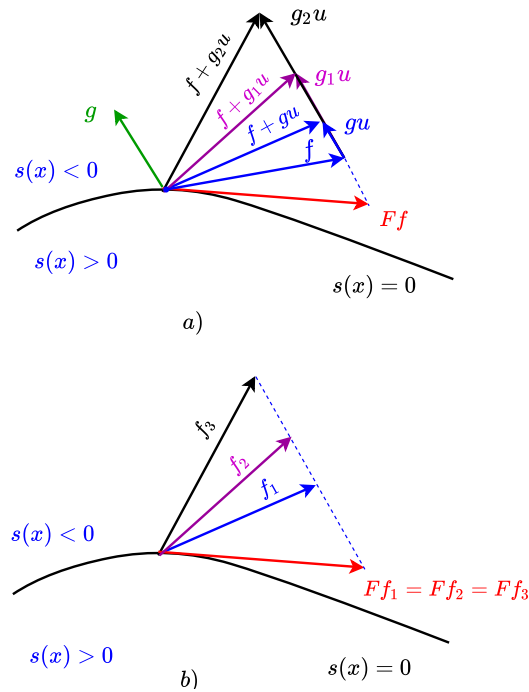


Figure 8.7: Interpretación geométrica de la robustez a cambios en los parámetros. a) Cambios en  $g$ . b) Cambios en  $f$ .

y por consiguiente, el control presenta robustez fuerte a ese cambio de parámetros. En el caso más general, en que las variables de estado con que se trabaja no permitiesen expresar el cambio de parámetros exclusivamente en el span de  $g(x)$ , sólo habrá una componente de ese cambio que será completamente rechazada.



# 9

## CONTROL POR MD DE SISTEMAS NL

### 9.1 Modelos de sistemas NL

El diseño de controladores por MD puede simplificarse eligiendo adecuadamente las variables de estado a realimentar. Por esta razón, antes de abordar el problema de diseño, nos detendremos para hacer unos pocos comentarios referidos a la transformación de modelos de sistemas no lineales.

#### 9.1.1 Grado relativo

Consideremos un sistema con estados  $x(t)$ , entrada  $u(t)$  y salida  $y = h(x)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x).\end{aligned}\tag{9.1}$$

Se dice que la salida del sistema es de grado relativo  $r$  con respecto a la entrada  $u$  si, al derivar sucesivamente la salida  $y(t)$  ( $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$ ), la acción de control  $u$  aparece en forma explícita recién en la derivada de orden  $r$  ( $d^r y/dt^r$ ). En sistemas lineales, el grado relativo coincide con la diferencia entre el número de polos y el de ceros  $r = \#p - \#z$ .

En términos de la derivada de Lie, diremos que la salida  $y = h(x)$  es de grado relativo  $r$  si

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= L_{f+gu}y = L_f h + \underbrace{L_g h}_0 \text{ si } r > 1 \quad u = L_f h \\
\ddot{y} &= L_{f+gu}(L_f h) = L_f(L_f h) + \underbrace{L_g(L_f h)}_0 \text{ si } r > 2 \quad u = L_f^2 h \\
&\vdots \\
y^{(r-1)} &= L_{f+gu}(L_f^{r-2} h) = L_f(L_f^{r-2} h) + \underbrace{L_g(L_f^{r-2} h)}_0 \quad u = L_f^{r-1} h \\
y^{(r)} &= L_{f+gu}(L_f^{r-1} h) = L_f(L_f^{r-1} h) + \underbrace{L_g(L_f^{r-1} h)}_{\neq 0} \quad u = L_f^r h + L_g(L_f^{r-1} h) u
\end{aligned} \tag{9.2}$$

es decir, la variable de control  $u$  aparece recién en la derivada de orden  $r$  ( $L_{f+gu}(L_f^{r-1} h)$ ).

**Ejemplo.** Las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x) u = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= h(x) = x_1
\end{aligned} \tag{9.3}$$

corresponden al oscilador de Van der Pol. Verifiquemos el grado relativo de la salida  $y = x_1$  con respecto a  $u$ . Para esto, primero calculamos

$$\dot{y} = L_f h + L_g h u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{bmatrix}}_{x_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_0 u \tag{9.4}$$

como  $L_g h = 0$ , la salida del oscilador no es de grado relativo 1, verifiquemos que sí es de grado 2 (tener presente que  $r \leq n$ ). Para ello, calculamos la segunda derivada de la salida

$$\ddot{y} = L_f(L_f h) + L_g(L_f h) u = L_f(L_f h) + \frac{\partial L_f h}{\partial x} g u \tag{9.5}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = L_f(L_f h) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\neq 0 \Rightarrow r=2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9.6)$$

Efectivamente, el grado relativo de la salida del oscilador de Van der Pol es  $r = 2$ .

### 9.1.2 Transformación de modelos

Dependiendo de las variables de estado elegidas, pueden plantearse distintos modelos para el mismo sistema. Supongamos que ya disponemos de un modelo a partir de las variables genéricas  $x(t)$ .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (9.7)$$

y que nos interesa calcular otro modelo a partir de variables  $z(t)$  que dependen de las variables originales  $x(t)$  a través de la transformación (difomorfismo)

$$z(t) = \Phi(x(t)). \quad (9.8)$$

Obviamente, para poder hacerlo, debe existir la transformación inversa

$$x(t) = \Phi^{-1}(z). \quad (9.9)$$

El nuevo modelo se obtiene a partir de derivar la transformación (9.8) y de reemplazar  $x(t)$  por (9.9)

$$\dot{z}(t) = \dot{\Phi}(x(t)) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \quad (9.10)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x}(t) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \quad (9.11)$$

quedando el modelo de variables de estado en  $z(t)$

$$\dot{z}(t) = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}}_{f(z)} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}}_{g(z)} u(t). \quad (9.12)$$

**Ejemplo.** En el caso de sistemas lineales ( $\dot{x} = Ax + Bu$ ) empleábamos la transformación  $T = P^{-1}$  con el fin de obtener distintos modelos

$$z(t) = \Phi(x(t)) = Tx(t) \quad x(t) = \Phi^{-1}(z(t)) = Pz(t)$$

Aplicamos (9.12) para encontrar el nuevo modelo lineal en variables  $z(t)$

$$\dot{z}(t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=\Phi^{-1}(z)} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) u(t) \right|_{x=\Phi^{-1}(z)} u(t) \quad (9.13)$$

donde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = T \quad (9.14)$$

y teniendo presente que en sistemas lineales

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax \\ g(x) &= B, \end{aligned} \quad (9.15)$$

el nuevo modelo resulta

$$\dot{z}(t) = TAx(t)|_{x=T^{-1}z} + TBu(t)|_{x=T^{-1}z} \quad (9.16)$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t). \quad (9.17)$$

### 9.1.3 Modelo Normal y Modelo Regular

Con el fin de simplificar el análisis del sistema de control, muchas veces se busca formular el problema a partir de un modelo canónico (una realización canónica). Probablemente, la realización "Normal" sea una de las más útiles. La estructura de este modelo difiere ligeramente dependiendo que el grado relativo sea igual a  $n$  o menor. Discutiremos sus dos variantes en las secciones 9.2 y 9.3 directamente en el contexto del control por MD. Posteriormente, en la sección 9.4 definiremos el modelo Regular y veremos como diseñar un control por MD con este modelo.



## 9.2 Control por MD con modelo Normal con $r=n$

### 9.2.1 Modelo Normal para sistemas con grado relativo $r = n$

Cuando la salida de un sistema es de grado relativo  $r = n$ , las variables de estado de la realización Normal se eligen de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= y(t) \\
 z_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{z}_1(t) \\
 z_3(t) &= \ddot{y}(t) = \dot{z}_2(t) \\
 &\vdots \\
 z_n(t) &= y^{(n-1)}(t) = \dot{z}_{n-1}(t),
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

resultando un modelo de estados extremadamente sencillo, el modelo Normal

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\
 \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\
 \dot{z}_3(t) &= z_4(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t) \\
 z_n(t) &= a(z) + b(z)u(t).
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Para obtener el modelo Normal a partir de un sistema en variables  $x(t)$  genéricas

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
 y &= h(x),
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

debemos encontrar la transformación (difeomorfismo)

$$z(t) = \Phi(x(t)) \tag{9.21}$$

$$x(t) = \Phi^{-1}(z(t)) \tag{9.22}$$

para aplicarlo en

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= L_f h + \underbrace{L_g h}_0 u = z_2 \\
 \dot{z}_2 &= L_f^2 h + \underbrace{L_g (L_f h)}_0 u = z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= \underbrace{L_f^n h}_{a(x)} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} + \underbrace{L_g (L_f^{n-1} h)}_{b(x)} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} u = a(z) + b(z) u
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

siendo

$$a(z) = L_f^n h \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \tag{9.24}$$

$$b(z) = L_g (L_f^{n-1} h) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}. \tag{9.25}$$

La figura 9.1 muestra el diagrama en bloques del modelo obtenido. Vemos que la estructura de este modelo es extremadamente simple.

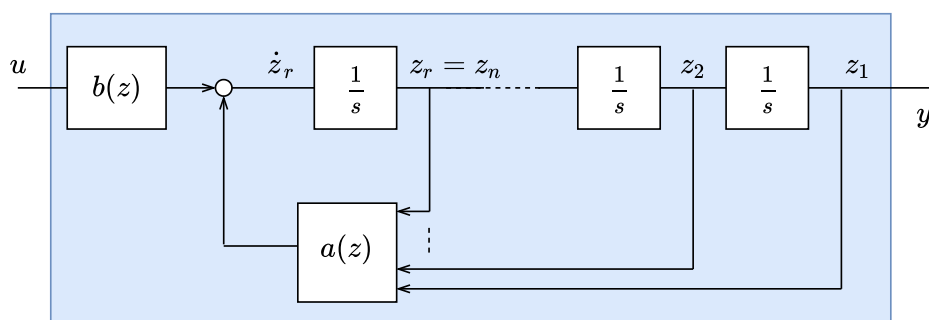


Figure 9.1: Modelo normal de un sistema de grado relativo  $r = n$

**Ejemplo.** Determinar el modelo normal del sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (x_3 - x_2)^2 + u \\
 \dot{x}_2 &= (x_3 - x_2) \\
 \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + x_3 \\
 y &= x_2.
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

Primero calculamos el difeomorfismo  $z(t) = \Phi(x(t))$  y su inversa. Para ello, y teniendo en cuenta que

$$f(x) = \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 \\ (x_3 - x_2) \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.27}$$

calculamos

$$\begin{aligned}
 \cdot \quad z_1 &= y = x_2 \\
 \cdot \quad z_2 &= \dot{z}_1 = L_f x_2 + L_g x_2 u \\
 &= \nabla x_2 \cdot f + \nabla x_2 \cdot g u \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot f + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot g}_0 u \\
 &= (x_3 - x_2) \\
 \cdot \quad z_3 &= \dot{z}_2 = L_f(x_3 - x_2) + L_g(x_3 - x_2) u \\
 &= \nabla(x_3 - x_2) \cdot f + \nabla(x_3 - x_2) \cdot g u \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot f + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot g}_0 u \\
 &= x_1
 \end{aligned} \tag{9.28}$$

luego

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}. \tag{9.29}$$

Para obtener el modelo normal a partir de (9.23), calculamos  $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$ . Primero verificamos su existencia, para lo cual basta que  $|\frac{\partial \Phi}{\partial x}| \neq 0$ . En nuestro caso

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

es no singular, por consiguiente la transformación inversa existe. Su determinación resulta inmediata a partir de despejar las variables  $x_i$  de (9.29)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_1 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}. \quad (9.31)$$

Disponiendo de  $\Phi^{-1}(z)$ , sólo debemos reemplazarlo en (9.31) para obtener el modelo Normal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= \underbrace{(x_3 - x_2)^2}_{a(x)} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} + \underbrace{1}_{b(x)} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} u, \end{aligned} \quad (9.32)$$

resultando

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_2^2 + u \end{cases} \quad (9.33)$$

$$y = z_1.$$

La figura 9.2 muestra el diagrama en bloques del modelo obtenido. Vemos que la estructura de este modelo es extremadamente simple.

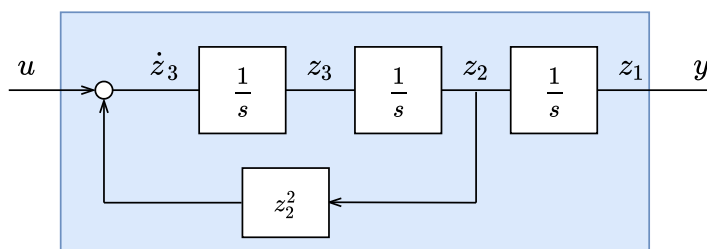


Figure 9.2: Modelo normal del sistema (9.26)

### 9.2.2 Diseño del controlador por MD para el caso de $r = n$

El control por MD de un sistema no lineal, con salida de grado relativo  $r = n$  resulta trivial si podemos hacerlo a partir de un modelo normal. Lo usual es proponer una superficie de control que garantice una dinámica lineal en las variables  $z$

$$s(z) = r - k_1 z_1 - k_2 z_2 - \dots - k_n z_n = 0. \quad (9.34)$$

En principio el diseño se reduce a calcular las ganancias que nos permitan verificar las especificaciones. Como en el caso de sistemas lineales, el cálculo del control equivalente a partir de la condición de invarianza nos permite

- determinar los valores límites  $u^+$  y  $u^-$  para trabajar en un determinado rango de las variables de estado
- encontrar las expresiones de lazo cerrado que nos permitan calcular las ganancias de la superficie

Con respecto al primer punto, la tarea no es conceptualmente distinta a la ya analizada para sistemas lineales. Dependiendo de la complejidad del sistema podría ser un poco más o menos complicado determinar los límites. Con respecto al segundo punto, en el caso que planteamos en esta sección (modelo normal de grado relativo  $r = n$ ) no es estrictamente necesario el cálculo del control equivalente para obtener las expresiones de lazo cerrado. Estas expresiones pueden obtenerse en forma sencilla, despejando la variable  $z_n$  de (9.34)

$$z_n = r - \frac{k_1}{k_n} z_1 - \frac{k_2}{k_n} z_2 - \dots - \frac{k_{n-1}}{k_n} z_{n-1} \quad (9.35)$$

y reemplazándola en (9.19)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n = r - \frac{k_1}{k_n} z_1 - \frac{k_2}{k_n} z_2 - \dots - \frac{k_{n-1}}{k_n} z_{n-1} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Las ecuaciones diferenciales (9.36) corresponden al modelo de estado del sistema operando en MD. Son  $n - 1$  ecuaciones, ya que en MD se ha perdido un orden.

Habr a notado que las ecuaciones (9.36) son las de un sistema lineal que está en la forma canónica controlable y donde los coeficientes  $k_i/k_n$  cambiados de signo son los del polinomio característico de lazo cerrado. La determinación de las ganancias es inmediata a partir del polinomio deseado.

Nota: el comportamiento lineal es en las variables  $z(t)$ . Si se quiere linealidad en las variables  $x$ , puede proponerse la superficie

$$s(x) = r - kx|_{x=\phi(z)}. \tag{9.37}$$

La figura 9.3 muestra un diagrama en bloques del sistema de control a lazo cerrado. Como puede observar el control es sorprendentemente simple.

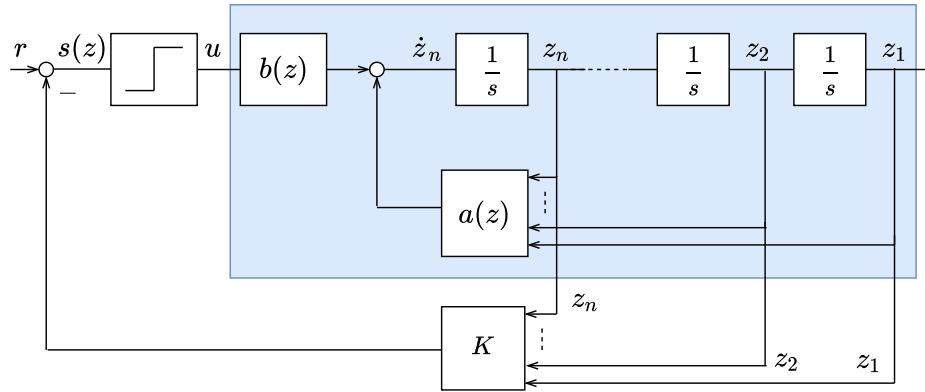


Figure 9.3: Diagrama de control por MD de un sistema de grado relativo  $r = n$  a partir de las variables de estado del modelo normal

**Ejemplo.**

Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{x_3+0,2} + x_1 u \end{aligned} \tag{9.38}$$

donde fácilmente podemos identificar

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ 1/(x_3 + 0,2) \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}. \tag{9.39}$$

En la medida que vamos derivando la salida  $y(t)$  para verificar su grado relativo, vamos seleccionando las variables de estado para el modelo normal,

$$\begin{aligned}
 z_1 &= y = x_1 \\
 z_2 &= \dot{z}_1 = L_f x_1 + L_g x_1 u \\
 &= \nabla x_1 \cdot f + \nabla x_1 \cdot g u \\
 &= (-x_1 + x_2) \\
 z_3 &= \dot{z}_2 = L_f(-x_1 + x_2) + L_g(-x_1 + x_2) u \\
 &= \nabla(-x_1 + x_2) \cdot f + \nabla(-x_1 + x_2) \cdot g u \\
 &= x_1 - 2x_2 + x_3 .
 \end{aligned} \tag{9.40}$$

Hemos podido elegir los tres estados como la salida y sus derivadas primera y segunda. Esto ha sido posible ya que en ninguna de estas variables ha aparecido explícitamente la entrada  $u$ . Es decir, porque la salida  $y(t)$  es de grado relativo  $r = n = 3$  ( $r$  no puede ser mayor que  $n$ ).

La vinculación entre las variables  $z$  y  $x$  la obtenemos a partir de (9.40),

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}. \tag{9.41}$$

Para asegurarnos que exista la transformación inversa, verificamos que el Jacobiano  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  sea de rango completo. Efectivamente

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.42}$$

lo es. Luego,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 + z_2 \\ z_1 + 2z_2 + z_3 \end{bmatrix}. \tag{9.43}$$

Ahora sí, estamos en condiciones de plantear el modelo normal

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= L_f^3 y + L_g(L_f^2 y) u \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \\
 &= L_f^3 y + L_g(x_1 - 2x_2 + x_3) u \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

resultando,

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= \underbrace{-z_2 - 2z_3 + \frac{1}{z_1 + 2z_2 + z_3 + 0,2}}_{a(z)} + \underbrace{z_1}_{b(z)} u.
 \end{aligned} \tag{9.45}$$

Una vez obtenido el modelo normal, procedemos al diseño del control por MD. Para ello proponemos una superficie de control lineal

$$s(z) = r - k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 = 0 \tag{9.46}$$

y verificamos la condición de transversalidad

$$L_g s(z) = \nabla s \cdot g = [-k_1 \quad -k_2 \quad -k_3] g = -k_3 x_1 \tag{9.47}$$

que debiendo ser negativo, nos dice que si  $k_3$  es positivo podemos trabajar en el rango  $x_1 > 0$ .

Durante el MD  $s(x) = 0$ , luego

$$z_3 = \frac{r}{k_3} - \frac{k_1}{k_3} z_1 - \frac{k_2}{k_3} z_2, \tag{9.48}$$

expresión que podemos reemplazar en (9.45) para tener el modelo de LC

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 = \frac{r}{k_3} - \frac{k_1}{k_3} z_1 - \frac{k_2}{k_3} z_2.
 \end{aligned} \tag{9.49}$$



Luego , si quisiéramos que el comportamiento de LC corresponda al de un par de autovalores en

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,1 - j0,3 \\ \lambda_2 &= -0,1 + j0,3 \end{aligned} \tag{9.50}$$

el polinomio resultante debería ser

$$(s + 0,1 - j0,3)(s + 0,1 + j0,3) = s^2 + \underbrace{0,2}_{\frac{k_2}{k_3}} s + \underbrace{0,1}_{\frac{k_1}{k_3}} \tag{9.51}$$

y haciendo uso del grado de libertad para elegir  $k_1$ , resulta

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 10 \tag{9.52}$$

La figura 9.4 muestra la variable controlada  $y(t)$ , la cual presenta la dinámica asignada a partir del instante en que  $s(x) = 0$  (parte inferior de la figura).

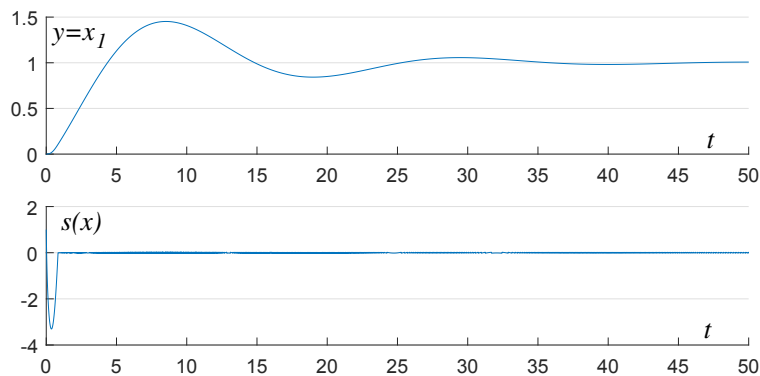


Figure 9.4: Salida del sistema NL controlado por MD y función de conmutación

### 9.3 Control por MD con modelo Normal con $r < n$

#### 9.3.1 Modelo Normal de sistemas con salida de grado relativo $r < n$

Cuando el grado relativo  $r$  es menor que  $n$ , las variables de estado para el modelo normal se eligen como

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} z_1(t) = y(t) \\ z_2(t) = \dot{y}(t) \\ z_3(t) = \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ z_r(t) = y^{(r-1)}(t) \\ z_{r+1}(t) = \Phi_{r+1}(x) \\ z_{r+2}(t) = \Phi_{r+2}(x) \\ \vdots \\ z_n(t) = \Phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (9.53)$$

es decir, los primeros  $r$  estados se eligen como la salida y sus sucesivas derivadas hasta la de orden  $r - 1$ . Los restantes  $n - r$  estados pueden ser elegidos libremente.

Luego, el modelo normal resulta

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) &= z_4(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_r(t) &= L_f^r y \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} + L_g L_f^{r-1} y \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} u(t) = a(z) + b(z)u(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r+1}(t) &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u(t) \\ \dot{z}_{r+2}(t) &= q_{r+2}(z) + p_{r+2}(z)u(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= q_n(z) + p_n(z)u(t) \end{aligned} \quad (9.54)$$

La figura 9.5 muestra un diagrama en bloques del modelo normal para el caso de  $r < n$ . Los primeros  $r$  estados corresponden a una cadena de integradores y los restantes son agrupados en el bloque  $(q(z), p(z))$ .

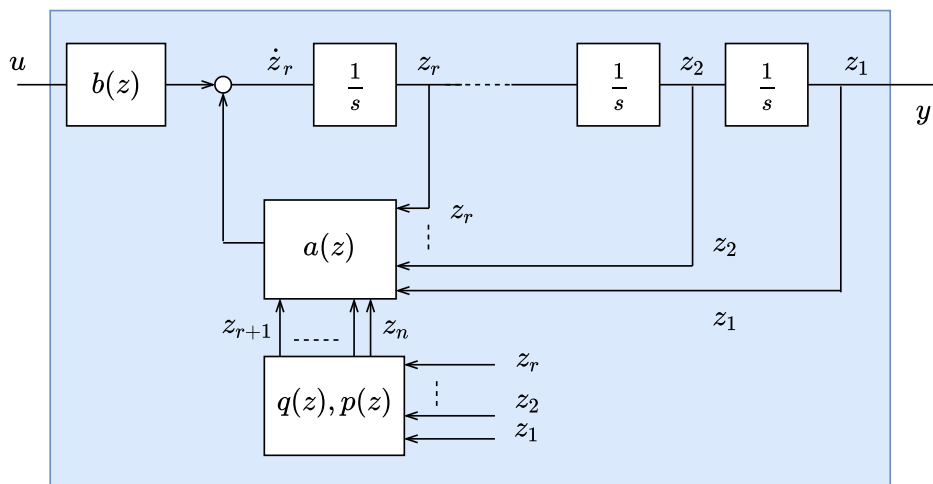


Figure 9.5: Modelo normal para sistema de grado relativo  $r < n$

Nota. La nomenclatura convencional (que nosotros trataremos de evitar) para designar los estados del modelo normal es

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) \\ \dot{\xi}_2(t) = \xi_3(t) \\ \dot{\xi}_3(t) = \xi_4(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_r(t) = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \cdot u(t) \\ \dot{\eta}_{r+1}(t) = q_{r+1}(\xi, \eta) + p_{r+1}(\xi, \eta) \\ \dot{\eta}_{r+2}(t) = q_{r+2}(\xi, \eta) + p_{r+2}(\xi, \eta) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n(t) = q_n(\xi, \eta) + p_n(\xi, \eta) \end{cases} \quad (9.55)$$

### 9.3.2 Diseño del controlador por MD para el caso de $r < n$

Un diseño inmediato es proponer una superficie lineal que incluya sólo los primeros  $r$  estados

$$s(z) = r - k_1 z_1 - k_2 z_2 - \dots - k_r z_r = 0. \quad (9.56)$$

Como ya lo hemos hecho en reiteradas ocasiones, con el cálculo de  $u_{eq}$ , pueden seleccionarse los límites  $u^-$  y  $u^+$  que permitan garantizar las condiciones de existencia del MD en la zona de trabajo de interés. Si bien este control, también nos permitiría obtener la dinámica de lazo cerrado, es más directo proceder como en la sección anterior despejando  $z_r$  de (9.54)

$$z_r = \frac{r}{k_r} - \frac{k_1}{k_r} z_1 - \frac{k_2}{k_r} z_2 - \dots - \frac{k_{r-1}}{k_r} z_{r-1} \quad (9.57)$$

y reemplazándolo en la ecuación diferencial de  $\dot{z}_{r-1}$  (ecuación (9.56)). Luego, las primeras  $r-1$  ecuaciones diferenciales del sistema de lazo cerrado resultan

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) &= z_4(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= z_r = \frac{r}{k_r} - \frac{k_1}{k_r} z_1 - \frac{k_2}{k_r} z_2 - \dots - \frac{k_{r-1}}{k_r} z_{r-1}. \end{aligned} \quad (9.58)$$

**Note** que:

- los primeros  $r-1$  estados presentarán una dinámica lineal,
- el régimen deslizante hace que el sistema pierna un estado, el estado  $r$ ,
- dado que las ecuaciones de estado (9.58) están en la forma canónica controlable, los coeficientes  $k_i/k_r$  se corresponden con los coeficientes del "polinomio característico de lazo cerrado de los primeros  $r$  estados". Luego, los autovalores correspondientes son muy fácilmente asignables a partir de la elección de las ganancias de la superficie (9.56),
- asumiendo que se ha asignado una dinámica estable, los estados tienen que alcanzar un estado estacionario

$$\begin{aligned} z_{1ss} &= \rho \\ z_{2ss} &= 0 \\ z_{3ss} &= 0 \\ &\vdots \\ z_{(r-1)ss} &= 0 \end{aligned} \quad (9.59)$$

- con el proceder previo hemos garantizado el comportamiento lineal de los primeros  $r - 1$  estados  $z$ . El control permite que estos estados sean independientes de los últimos  $n - r$  estados. Estos últimos estados son los que definen una dinámica escondida (su evolución no se ve reflejada en la salida). Mas allá de esto, es imprescindible que la dinámica escondida de estos estados sea estable. Esto debe ser verificado, pudiendo presentar dificultad dependiendo de la complejidad del sistema. Una simplificación, de hecho es la que se emplea normalmente, es verificar la estabilidad de la dinámica escondida pero una vez que los primeros  $r - 1$  estados alcanzan el equilibrio. Es decir reemplazando (9.59) en las últimas ecuaciones de (9.54)

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{r+1}(t) &= q_{r+1}(z_{i_{ss}}, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n) + p_{r+1}(z_{i_{ss}}, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n) \\
 \dot{z}_{r+2}(t) &= q_{r+2}(z_{i_{ss}}, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n) + p_{r+2}(z_{i_{ss}}, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n(t) &= q_n(z_{i_{ss}}, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n) + p_n(z_{i_{ss}}, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n),
 \end{aligned} \tag{9.60}$$

con  $i \leq r$ .

**Ejemplo.** Control de un observador aéreo.

Consideremos la estabilización en altura de un vehículo aéreo no tripulado. Suponga que se quiere hacer un relevamiento en una zona inhóspita, para lo cual se emplea un vehículo como el esquematizado en la figura, debiendo controlarse su altura durante el período de observación.

Eligiendo como variables de estado a

- $x_1(t)$  = altura del aero-observador (se mide desde el valor de referencia)
- $x_2(t)$  = velocidad del aero-observador
- $x_3(t) = M + m(t)$  = masa total del vehículo incluyendo la del combustible
- $m(t)$  que es variable

resulta el modelo no lineal

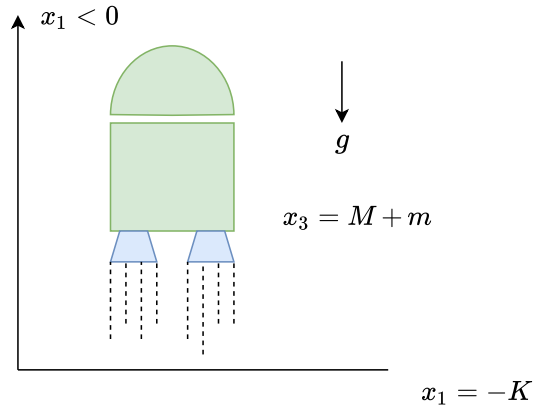


Figure 9.6: Vehículo aéreo de observación

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha - \gamma \frac{x_2}{x_3} - \frac{\mu\beta}{x_3} u \\ \dot{x}_3 = -\beta u \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha - \gamma \frac{x_2}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu\beta}{x_3} \\ -\beta \end{bmatrix}}_{g(x)} u \quad (9.61)$$

$$y = h(x) = x_1$$

El objetivo no es sólo mantener el aero-observador a cierta altura, sino también cambiar la misma en forma suave y controlada. Obviamente este objetivo es mientras el nivel de combustible esté dentro de los límites permitidos.

Comenzamos el diseño, verificando el grado relativo para plantear el modelo normal

*Primera derivada*

$$\dot{y} = L_f y + L_g y u \quad (9.62)$$

$$L_g y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu\beta}{x_3} \\ -\beta \end{bmatrix} = 0. \quad (9.63)$$

Vemos que la variable controlada no es de grado relativo 1. Seguimos probando.

Segunda derivada

$$\ddot{y} = L_f^2 y + L_g(L_y y) u \tag{9.64}$$

$$L_g(L_y y) = \dots = -\frac{\mu\beta}{x_3} \neq 0 \tag{9.65}$$

Luego el grado relativo es dos <sup>1</sup>. *Conclusión:* el modelo (9.61) está en la forma normal.

Proponemos una superficie que incluya los dos primeros estados

$$s(x) = r - k_1 x_1 - k_2 x_2 = 0 \tag{9.66}$$

y verificamos si la condición  $L_g s < 0$

$$L_g s = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu\beta}{x_3} \\ -\beta \end{bmatrix} = k_2 \frac{\mu\beta}{x_3} > 0. \tag{9.67}$$

Como no se cumple la condición, cambiamos el signo de la superficie

$$s(x) = -r + k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0. \tag{9.68}$$

En MD

$$s(x) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{k_2} r - \frac{k_1}{k_2} x_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } k_2=1}}{=} r - k_1 x_1, \tag{9.69}$$

luego, reemplazando en las ecuaciones de lazo abierto, obtenemos la dinámica de lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r - k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &\Rightarrow \text{desaparece por el MD} \\ \dot{x}_3 &= -\beta u_{eq}. \end{aligned} \tag{9.70}$$

La primer ecuación diferencial (donde hemos hecho uso del grado de libertad para elegir  $k_2 = 1$ ) nos dice que eligiendo adecuadamente la ganancia

---

<sup>1</sup>En realidad, las cuentas se podrían haber evitado, el grado relativo era evidente

$k_1$ , podemos definir la constante de tiempo con que el aero-observador alcanza distintas alturas.

Debido al MD, el sistema pierde un orden, el que corresponde al estado  $x_2$  y por consiguiente la segunda ecuación es redundante.

La tercera ecuación diferencial de (9.70) corresponde a una dinámica escondida (la del combustible!) que hay que verificar, hagámoslo. A partir de la condición de invarianza, despejamos el control equivalente

$$u_{eq} = \left( \frac{k_1}{k_2} x_2 + \alpha - \gamma \frac{x_2^2}{x_3} \right) \frac{x_3}{\mu \beta} \quad (9.71)$$

y reemplazando en

$$\dot{x}_3 = -\beta u_{eq} \quad (9.72)$$

pero también teniendo en cuenta que la dinámica escondida se verifica una vez que los otros estados han llegado al equilibrio (es decir,  $x_1 = r$  y  $x_2 = 0$ ), obtenemos

$$\dot{x}_3 = -\frac{\alpha}{\mu} x_3 . \quad (9.73)$$

Esta ecuación nos indica con que velocidad se agota el combustible, una vez alcanzado el equilibrio. Obviamente antes que se agote debe realizarse el retorno.

Nota. Mas allá de las simplificaciones que hayamos introducido con fines didácticos, se da cuenta de lo fácil que ha resultado el diseño de un sistema no lineal como este?

## 9.4 Diseño a partir del modelo regular

El modelo (o realización) canónico regular presenta la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) u \end{aligned} \quad (9.74)$$



Al igual que en el modelo normal con  $r = n$ , la acción de control aparece recién en la derivada de la variable  $x_n$ . Sin embargo, las ecuaciones diferenciales previas pueden presentar más complejidad que las del modelo normal.

Llamando

$$x_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n-1} \quad f_a(x) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n-1}, \quad (9.75)$$

podemos reescribir en forma compacta las ecuaciones (9.75)

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= f_a(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) u. \end{aligned} \quad (9.76)$$

El hecho de que  $\dot{x}_n$  dependa de la acción de control en forma explícita nos habilita a plantear una superficie

$$s(x) = r - x_n = 0, \quad (9.77)$$

ya que al derivar  $s(x)$  va a aparecer explícitamente  $u$  garantizando la existencia del control equivalente. En realidad, estamos interesados en que el estado  $x_n$  pueda seguir una referencia  $r$  que sea función de los estados  $x_a$ . Si hacemos esto

$$r = r(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = r(x_a) \quad (9.78)$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = r(x_a) - x_n = 0. \quad (9.79)$$

Verificamos la condición de transversalidad

$$L_g s(x) = \nabla s \cdot g = \left[ \frac{\partial s}{\partial x_a} \quad \frac{\partial s}{\partial x_n} \right] g = -g_n \neq 0. \quad (9.80)$$

Luego, podemos calcular el control equivalente

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} = \frac{1}{g_n} \nabla s \cdot f \quad (9.81)$$

$$\Rightarrow u_{eq} = \frac{1}{g_n} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_a} & \frac{\partial s}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_n \end{bmatrix} = \frac{1}{g_n} \left( \frac{\partial s}{\partial x_a} f_a - f_n \right) \quad (9.82)$$

y a partir de él, el rango de trabajo considerando que

$$u^- < u_{eq} = \frac{1}{g_n} \frac{\partial s}{\partial x_a} f_a - \frac{f_n}{g_n} < u^+. \quad (9.83)$$

**Ejemplo.** El modelo simplificado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{2}(1 + x_1^2) x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J} u \end{aligned} \quad (9.84)$$

corresponde a un sistema de orientación de un satélite, donde  $x_1$  es una variable vinculada a su orientación conocida como parámetro de Cayley-Rodrigues,  $x_2$  es la velocidad angular y  $J$  es la inercia.

Vemos que el modelo está en la forma regular, luego proponemos una superficie como (9.77)

$$s(x) = r(x_a) - x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad s(x) = r(x_1) - x_2 = 0, \quad (9.85)$$

donde debemos elegir  $r(x_a)$  para que el sistema se comporte de acuerdo a las especificaciones. Supongamos que éstas sean que el sistema a lazo cerrado presente un comportamiento lineal donde podamos asignar su dinámica (que será de primer orden por la reducción que fuerza el MD). Luego, si deseamos que<sup>2</sup>

$$\dot{x}_1 \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{dinámica} \\ \text{deseada}}}{=} \lambda_1 R - \lambda_1 x_1, \quad (9.86)$$

<sup>2</sup>R es la referencia que le imponemos al sistema de orientación que no debería confundirse con  $r(x_a)$  que es la referencia para el MD que nos permite linealizar el sistema

$x_2$  debería verificar

$$x_2 = \frac{2\lambda_1 (R - x_1)}{(1 + x_1^2)}. \quad (9.87)$$

Luego, ésta debería ser la referencia  $r(x_a) = r(x_1)$

$$r(x_1) = \frac{2\lambda_1 (R - x_1)}{(1 + x_1^2)} \Rightarrow s(x) = \frac{2\lambda_1 (R - x_1)}{(1 + x_1^2)} - x_2 = 0. \quad (9.88)$$

La condición de transversalidad

$$L_g s(x) = \nabla s \cdot g = \left[ \frac{\partial s}{\partial x_a} \quad -1 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = -\frac{1}{J} < 0, \quad (9.89)$$

se verifica, resultando el control equivalente

$$u_{eq} = -Jx_2(Rx_2 + \lambda) \quad (9.90)$$

Reemplazando el control equivalente en la expresión (9.84), obtenemos la dinámica escondida de  $x_2$ ,

$$\dot{x}_2 = -x_2(Rx_2 + \lambda) \quad (9.91)$$

que como muestra la figura 9.7 presenta dos puntos de equilibrio. uno inestable en  $x_2 = -\lambda/R$  y otro estable en  $x_2 = 0$ , lo cual nos indica que la región de trabajo queda limitada a  $x_2 > -\lambda/R$ . Adicional a este límite hay que considerar el que impone los valores límites de  $u$  es decir del par de reacción. Si estos son  $-M$  y  $+M$ , entonces

$$-\frac{\lambda}{2R} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4R^2} + \frac{M}{JR}} < x_2 < -\frac{\lambda}{2R} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4R^2} + \frac{M}{JR}} \quad (9.92)$$

La figura 9.8 muestra, para  $\lambda = 0,5$ ,  $R = 1$  y  $J = 1$ , la superficie de control (9.88) y trayectorias entrando en MD. Note la no linealidad de la superficie que permite que los estados  $x$  presenten una dinámica lineal.

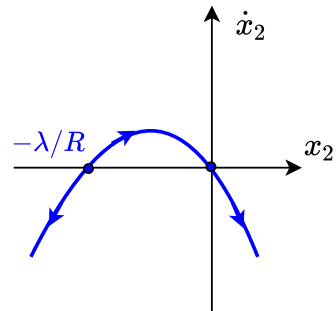


Figure 9.7: Estabilidad de los puntos de equilibrio de la dinámica escondida

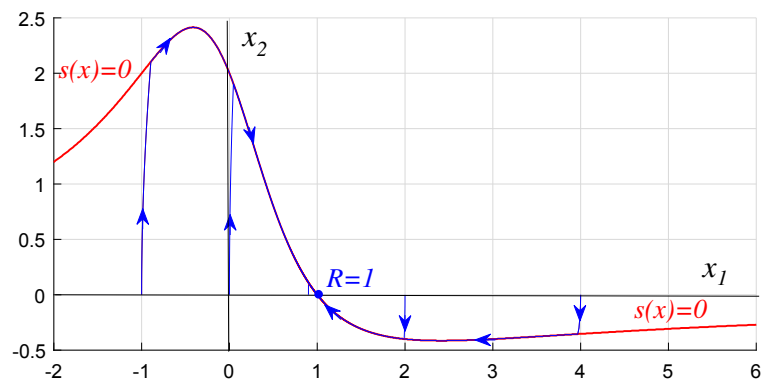


Figure 9.8: Superficie de control y trayectorias

## 10

# CONTROL DE SISTEMAS NO LINEALES. APLICACIONES.

### 10.1 Convertidor Boost

En esta sección realizaremos una evaluación exhaustiva del control de un convertidor Boost en el marco de los regímenes deslizantes. Este análisis detallado con fines didácticos podría dar lugar a pensar que el diseño es complicado. Pero todo lo contrario, en realidad el enfoque de los regímenes deslizantes simplifica en grado extremo el control de los sistemas no lineales.

#### Modelo

La figura 10.1 esquematiza el circuito de un convertidor DC a DC conocido como convertidor Boost. Es empleado en aplicaciones en las que es necesario regular una tensión  $v$  en un valor superior al de la tensión de la entrada  $E$ . A simple vista vemos que el circuito es un sistema de estructura variable ya que, dependiendo del estado de la llave, presentará dos comportamientos totalmente diferentes. Efectivamente, si la llave está en la posición 0, el comportamiento dinámico del circuito va a estar regido por dos polos complejos conjugados que resultan de la serie del inductor  $L$  con el paralelo  $RC$  (resistencia de carga y capacitor de salida). Por otra parte, si la llave se encuentra en la posición 1, el circuito presenta dos polos reales, uno en el origen debido al inductor y el otro con valor  $-1/RC$ .

Planteemos un modelo de estados para cada posición de la llave.

*Modelo para la llave en la posición  $u = 0$*

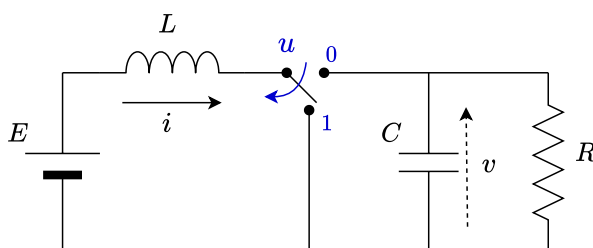


Figure 10.1: Convertidor BOOST

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{1}{L}(E - v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}(i - \frac{v}{R}). \end{aligned} \quad (10.1)$$

*Modelo para la llave en la posición  $u = 1$*

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{1}{L}(E) \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}(-\frac{v}{R}). \end{aligned} \quad (10.2)$$

A partir de los modelos (10.1) y (10.2), es posible construir un único modelo, válido tanto para la llave en la posición  $u = 0$  como  $u = 1$

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{1}{L}(E - v(1 - u)) \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}(i(1 - u) - \frac{v}{R}) \end{aligned} \quad (10.3)$$

o bien

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E + \frac{1}{L}v u \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i u. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Los terceros términos de las ecuaciones (10.4), ponen de manifiesto la naturaleza no lineal de este convertidor. Fácilmente, pueden distinguirse

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L} \\ \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}v \\ -\frac{1}{C}i \end{bmatrix}. \quad (10.5)$$

### Objetivos para el control del convertidor Boost

Consideremos tres casos con distintos objetivos de control para el convertidor Boost

- Caso A como fuente de tensión (control de tensión)
- Caso B como fuente de corriente (control de corriente)
- Caso C control de energía almacenada

**Nota.** Si bien el ejemplo es medianamente simple y su control podría abordarse sin dificultad a partir del modelo (10.5), lo desarrollaremos a partir del modelo normal discutido en el capítulo previo. La idea es comprender la mecánica del diseño, la cual puede resultar extremadamente práctica en sistemas más complejos.

#### 10.1.1 Caso A. Control de tensión

Teniendo presente el objetivo de controlar la tensión del convertidor, se plantea un modelo normal que tenga esta variable como salida y como primer estado,

$$\begin{aligned} y(t) &= h(x) = v(t) \\ z_1 &= v(t) \end{aligned} \quad (10.6)$$

Para verificar el grado relativo, derivamos la salida (ecuación 10.4)

$$\dot{z}_1 = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i u \quad (10.7)$$

donde vemos que la acción de control  $u$  aparece en forma explícita en esta derivada. Luego la salida  $v$  es de grado relativo  $r = 1$  con respecto a la acción de control  $u$ . Como  $r = 1$ , el conjunto de los primeros estados del modelo normal (estados  $\xi$  según la nomenclatura (9.55)) tendrá un sólo elemento, la salida  $v(t)$ , y podemos elegir con libertad la otra variable de estado (la que corresponde al conjunto  $\eta$  según la nomenclatura (9.55)). Por simplicidad y por su sentido físico, elegimos la corriente por el inductor  $i$  como la otra variable de estado. Luego el modelo normal genérico

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = a(\xi_1, \eta_1) + b(\xi_1, \eta_1) u(t) \\ \dot{\eta}_1(t) = q_1(\xi_1, \eta_1) + p_1(\xi_1, \eta_1) u(t) \end{cases} \quad (10.8)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = a(z_1, z_2) + b(z_1, z_2) u(t) \\ \dot{z}_2(t) = q_1(z_1, z_2) + p_1(z_1, z_2) u(t) \end{cases} \quad (10.9)$$

se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i u \\ \dot{i} &= -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E + \frac{1}{L}v u, \end{aligned} \quad (10.10)$$

para el caso particular del Boost con  $v$  como salida. Es decir que el modelo normal elegido resultó solo un intercambio entre filas con respecto al modelo (10.4).

Una vez obtenido el modelo debemos seleccionar la superficie de control. Dado que la variable a controlar es la tensión  $v$ , resulta intuitivo, y tentador, elegir como superficie de MD a

$$s(z) = s(v, i) = V_r - v = 0 \quad (10.11)$$

siendo  $V_r$  la referencia de tensión.

Antes de continuar el diseño, verificamos las condiciones para que exista el MD.

- *Condición necesaria de transversalidad*  $L_g s(z) < 0$

$$\begin{aligned} L_g s(z) &= \nabla s(z) \cdot g = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial v} & \frac{\partial s}{\partial i} \end{bmatrix} \cdot g \\ L_g s(z) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}i \\ \frac{1}{L}v \end{bmatrix} = \frac{1}{C}i \geq 0 \end{aligned} \quad (10.12)$$

**No se cumple!** Pero lo arreglamos fácil. Alcanza con cambiarle el signo a  $s(z)$

$$s(z) = s(v, i) = v - V_r \quad (10.13)$$

Verificamos la condición de transversalidad después del cambio

$$\begin{aligned} L_g s(z) &= \nabla s(z) \cdot g = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial v} & \frac{\partial s}{\partial i} \end{bmatrix} \cdot g \\ L_g s(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}i \\ \frac{1}{L}v \end{bmatrix} = -\frac{1}{C}i < 0 \end{aligned} \quad (10.14)$$

y vemos que ahora si se cumple. Un problema menos.



- Condición necesaria y suficiente para la existencia del MD:  $u^- \leq u_{eq} \leq u^+$  (en nuestro caso  $0 \leq u_{eq} \leq 1$ )

Como recuerdan, la expresión del control equivalente se puede obtener a partir de las condiciones de invarianza,

$$\begin{cases} s(z) = 0 \\ \dot{s}(z) = L_f s(z) + u_{eq} L_g s(z) = 0 \end{cases} \quad (10.15)$$

resultado

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(z)}{L_g s(z)} = -\frac{\nabla s(z) \cdot f}{\nabla s(z) \cdot g} \quad (10.16)$$

y en nuestro caso particular

$$u_{eq} = -\frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v \\ -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}i \\ \frac{1}{L}v \end{bmatrix}} = -\frac{v}{Ri} + 1 \quad (10.17)$$

$$0 \leq u_{eq} = -\frac{v}{Ri} + 1 \leq 1. \quad (10.18)$$

Luego, sólo en los puntos de la superficie en que se cumpla la condición

$$0 \leq \frac{v}{Ri} \leq 1 \quad (10.19)$$

se establecerá el MD (figura 10.2). Los puntos que verifican la condición (10.19) definen el rango de operación.

Para obtener la dinámica del sistema en MD, reemplazamos el control  $u$  por  $u_{eq}$  en las ecuaciones de lazo abierto

$$\dot{v} = \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i u_{eq} \quad (10.20)$$

$$\dot{i} = -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E + \frac{1}{L}v u_{eq}.$$

Pero, teniendo presente que durante el MD

$$s(z) = v - V_r = 0 \quad \Rightarrow \quad v = V_r \quad (10.21)$$

resulta

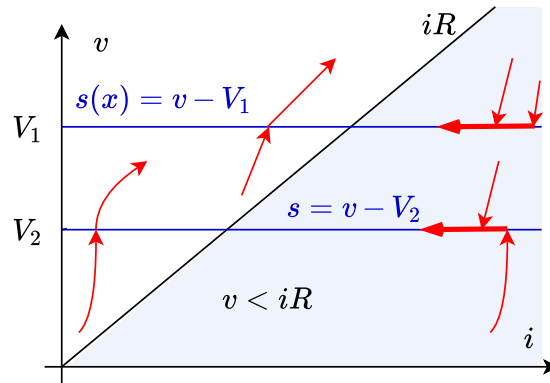


Figure 10.2: Zona del espacio de estados donde el convertidor BOOST puede operar en MD

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}V_r - \frac{1}{C}i \left(1 - \frac{V_r}{Ri}\right) \\ \dot{i} &= -\frac{1}{L}V_r + \frac{1}{L}E + \frac{1}{L}V_r \left(1 - \frac{V_r}{Ri}\right)\end{aligned}\quad (10.22)$$

es decir, las ecuaciones de lazo cerrado son

$$\begin{aligned}\dot{v} &= 0 \\ \dot{i} &= \frac{E}{L} - \frac{1}{LRi}V_r^2.\end{aligned}\quad (10.23)$$

Analicemos estas dos ecuaciones diferenciales

- la primera,  $\dot{v} = 0$ , nos dice que la tensión es constante. De hecho, el sistema está operando en MD y por consiguiente  $v = V_r$ . Pero esta ecuación también está poniendo en evidencia la reducción de estados (de dinámica) que introducen los regímenes deslizantes. Efectivamente, durante el modo deslizante el sistema muestra una sola dinámica, la de la corriente  $i$
- la segunda ecuación diferencial, expresa la dinámica de la corriente  $i$  que suele llamarse escondida porque no es vista desde la salida  $v$  que permanece en el valor de referencia deseado  $v = V_r$ .

Ahora bien, es necesario que la dinámica de MD (en este caso, la corriente) sea estable. Para verificar esta propiedad, primero calcularemos el punto de equilibrio de la corriente anulando su derivada

$$\begin{aligned}\dot{v} &= 0 \\ \dot{i} &= \frac{E}{L} - \frac{1}{LRI}V_r^2 = 0,\end{aligned}\quad (10.24)$$

donde hemos llamado  $I$  a la corriente de estado estacionario, la cual resulta

$$I = \frac{V_r^2}{RE}. \quad (10.25)$$

Obviamente esta ecuación debe verificarse para cualquier referencia  $V_r$  que elijamos. Luego el lugar geométrico de los puntos de equilibrio para distintas  $V_r$  es una parábola como se ve en la figura 10.3. Vemos que dependiendo de la referencia el punto de equilibrio puede quedar dentro o fuera de la región en la que puede existir el modo deslizante. Para que el punto de equilibrio, esté dentro de la región de operación por MD, es necesario que la referencia sea  $V_r \geq E$ .

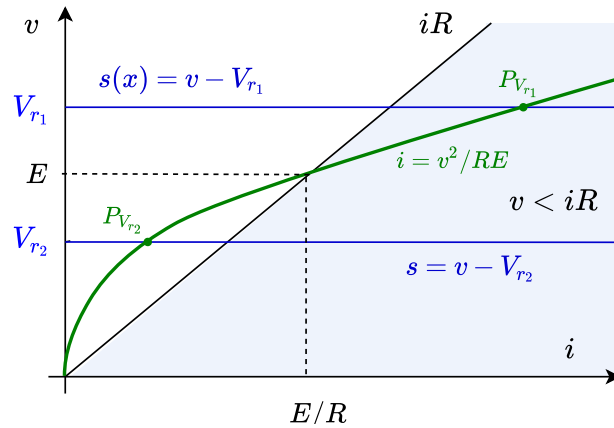


Figure 10.3: Lugar geométrico de los puntos de equilibrio para distintas referencias  $V_r$

Con los elementos que disponemos hasta aquí, uno podría imaginarse un comportamiento como el indicado en la figura 10.4, donde trayectorias que alcanzan la superficie, entran en MD y buscan el punto de equilibrio. Sin embargo, **ESTE RAZONAMIENTO ESTÁ MAL**. Veamos por qué.

Verifiquemos la estabilidad del punto de equilibrio  $(v,i) = (V_r, \frac{V_r^2}{RE})$ . Mientras el sistema opera en modo deslizante la dinámica de la corriente está definida por

$$\dot{i} = \frac{E}{L} - \frac{1}{LRi} V_r^2. \quad (10.26)$$

Una posibilidad para determinar la estabilidad del punto de trabajo es graficar la derivada de la corriente en función de la corriente como se indica

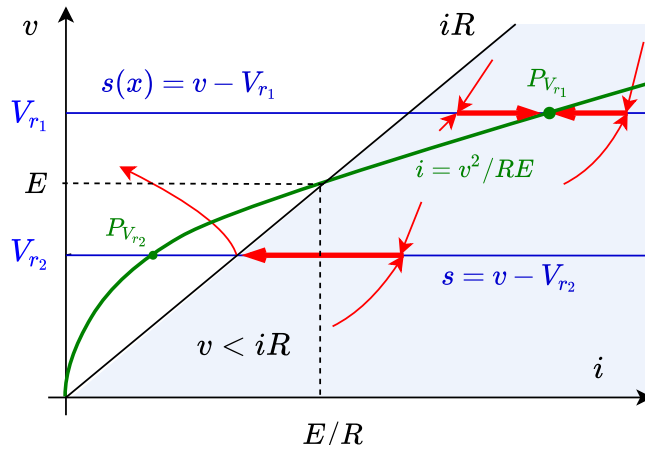


Figure 10.4: Comportamiento que podría desprenderse de un análisis rápido y EQUIVOCADO del convertidor Boost

en la figura 10.5. En la figura, la derivada de la corriente ha sido obtenida como la suma de los dos términos de la ecuación (10.26). El punto de equilibrio corresponde al punto de la curva en que la derivada es cero. Vemos que si una perturbación nos aparta del punto de equilibrio, por ejemplo hacia la derecha, como la derivada es positiva la corriente crece y se aparta del punto de equilibrio. De igual forma, una perturbación que disminuya el valor de la corriente con respecto a su equilibrio haría que la corriente se aleje aún mas del punto de equilibrio.

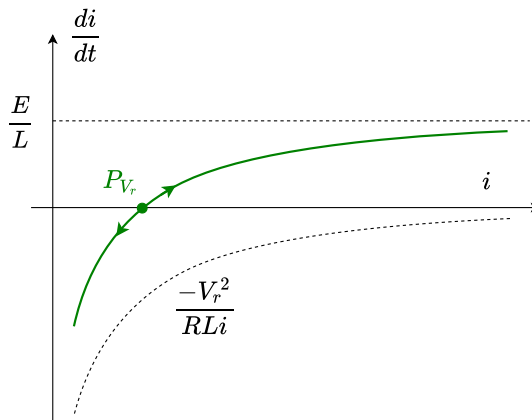


Figure 10.5: Gráfico de  $di/dt$  en función de  $i$  para determinar si el punto de equilibrio es estable

*Conclusión.* La dinámica es inestable. No se puede controlar la tensión a partir del error en tensión como variable excluyente. Luego, al igual que lo que pasaba con la fuente Buck, el control de tensión del Boost debe realizarse en forma indirecta a través de otra variable. Pero es importante distinguir la diferencia entre lo que pasaba con la fuente Buck y lo que pasa en la fuente Boost. Mientras que en la fuente Buck no se daban las condiciones para que exista MD, en la fuente Boost el problema se debe a la inestabilidad de la corriente mientras se mantiene la tensión constante.

En la figura 10.6 se muestra el comportamiento real de las trayectorias en el plano de estados. Estas trayectorias, cuando entran en la superficie se apartan del punto de equilibrio.

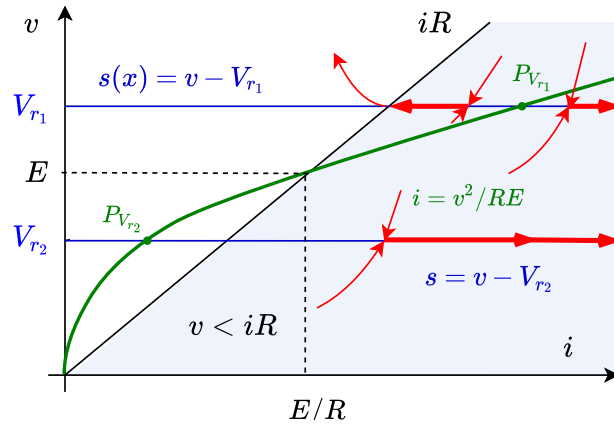


Figure 10.6: Figura correcta donde se muestra la evolución real de las trayectorias en el espacio de estados y la dinámica inestable del punto de equilibrio

No siempre es tan simple determinar gráficamente la estabilidad del punto de equilibrio. De ser este el caso, una alternativa es linealizar la ecuación diferencial (10.26) en el entorno del punto de equilibrio y calcular sus autovalores. Siguiendo este procedimiento en este ejemplo

$$\frac{d\Delta i}{dt} = -\frac{V_r^2}{LRi} \Big|_{i=I=\frac{V_r^2}{RE}} \Delta i \tag{10.27}$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = \frac{E^2 R}{V_r^2 L} \Delta i, \tag{10.28}$$

vemos que el autovalor de la ecuación diferencial linealizada es positivo, indicando que el punto de equilibrio es inestable.

**Interpretación cualitativa del comportamiento inestable**<sup>1</sup>

A los efectos de comprender la dinámica inestable en forma más explícita, consideremos una frecuencia de conmutación alta pero finita y compongamos gráficamente los tramos de trayectorias correspondientes a  $u = 0$  y  $u = 1$  para obtener la trayectoria completa.

- Trayectorias para la llave en la posición 0. Si la llave permanece en la posición  $u = 0$ , el circuito resultante es lineal<sup>2</sup> y se puede modelar con

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \quad (10.29)$$

siendo sus autovalores las raíces del polinomio

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (10.30)$$

que para valores razonables de  $L$ ,  $R$  y  $C$  resultan complejos conjugados y las trayectorias para cualquier condición inicial resultan espirales que convergen al punto de equilibrio que se calcula a partir de igualar a cero las ecuaciones diferenciales (10.29)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{1}{RC}v + \frac{1}{C}i = 0 \\ \dot{i} &= -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E = 0 \end{aligned} \quad (10.31)$$

resultando  $V = E$  y  $I = E/R$ . La figura 10.7 muestra la forma de las trayectorias para la llave en la posición 0 y para distintas condiciones iniciales.

- Trayectorias para la llave en la posición 1. En este caso el modelo (también lineal) se reduce a

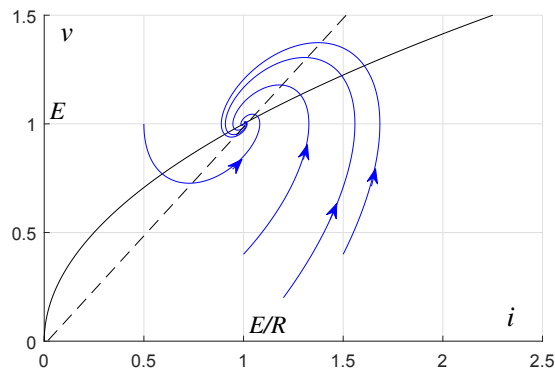
$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \quad (10.32)$$

y la evolución temporal (que resulta de la solución de las ecuaciones diferenciales (10.32)) es

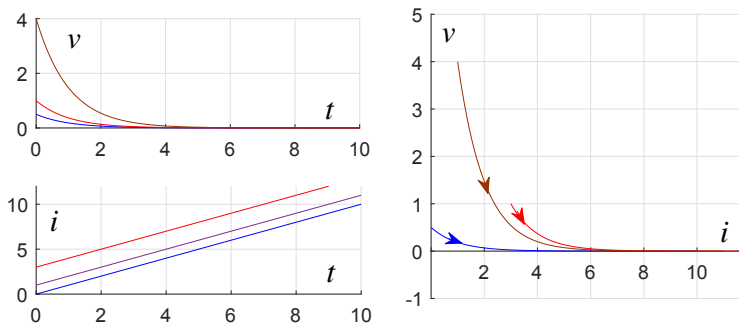
$$\begin{aligned} v(t) &= v(0)e^{-\frac{t}{RC}} \\ i(t) &= i(0) + \frac{E}{L}t \end{aligned} \quad (10.33)$$

<sup>1</sup>Por favor comprenda que el "análisis exhaustivo" que estamos haciendo es con fines didácticos. El diseño de todo control de MD suele reducirse a unas pocas cuentas

<sup>2</sup>la no linealidad aparece al conmutar la llave, ecuación (10.4)

Figure 10.7: Trayectorias para la llave en posición  $u = 0$ 

Si componemos la evolución de ambas variables en un sólo gráfico con el tiempo como parámetro, resultan trayectorias como las mostradas en la figura 10.8

Figure 10.8: Evolución temporal de las variables  $v$  e  $i$  y trayectorias en el plano de fase para para la llave en posición  $u = 1$ 

- La figura 10.9 muestra como se combinan tramos de las trayectorias de las figuras 10.7 y 10.8 para dar el comportamiento conmutado inestable,

### 10.1.2 Caso B. Control de corriente

Si bien la complejidad del convertidor no lo exige, igual plantearemos el modelo normal para el análisis y diseño del control de la corriente  $i$ . Luego,

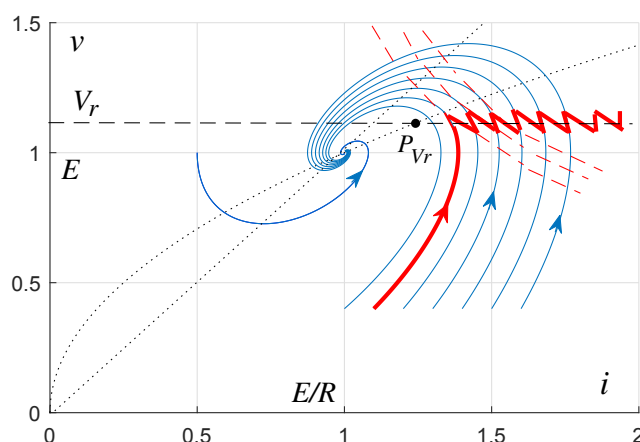


Figure 10.9: Comportamiento inestable de la corriente

siendo la corriente la variable a controlar, la tomamos como primera variable de estado. Como en su primera derivada aparece explícitamente la acción de control  $u$ ,

$$\dot{i} = \underbrace{-\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E}_{a(z)} + \underbrace{\frac{1}{L}v}_{b(z)} u \quad (10.34)$$

el grado relativo es  $r = 1$ , la ecuación (10.34) se constituye en la primera ecuación del modelo normal. Si bien la segunda variable de estado puede elegirse con libertad, resulta inmediato tomar la tensión en el capacitor. Luego, el modelo normal resulta

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \underbrace{-\frac{1}{L}v + \frac{E}{L}}_{a(z)} + \underbrace{\frac{1}{L}v}_{b(z)} u \\ \dot{v} &= \underbrace{\frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v}_{q(z)} - \underbrace{\frac{1}{C}i}_{p(z)} u \end{aligned} \quad (10.35)$$

con

$$f(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L} \\ \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v \end{bmatrix} \quad g(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}v \\ -\frac{1}{C}i \end{bmatrix}, \quad (10.36)$$

es decir, que el modelo (10.4) ya estaba en la forma normal.



Para el control de corriente proponemos la superficie más obvia

$$s(z) = I_r - i = 0 \quad (10.37)$$

y verificamos que la condición de transversalidad  $L_g s(z) < 0$

$$L_g(I_r - i) = \nabla s \cdot g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L}v \\ -\frac{1}{C}i \end{bmatrix} = -\frac{1}{L}v \quad (10.38)$$

se cumple, dado que tanto la inductancia como la tensión son positivas.



Si bien la ecuación (10.38) nos dice que puede existir el MD, la condición necesaria y suficiente

$$u^- < u_{eq} < u^+ \quad (10.39)$$

es la que nos permite determinar el rango en el que se va a producir. Teniendo en cuenta que

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(z)}{L_g s(z)} = -\frac{\nabla s(z) \cdot f}{\nabla s(z) \cdot g} \quad (10.40)$$

$$\Rightarrow u_{eq} = -\frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L} \\ \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L}v \\ -\frac{1}{C}i \end{bmatrix}} = 1 - \frac{E}{v}, \quad (10.41)$$

encontramos

$$0 < \frac{E}{v} < 1. \quad (10.42)$$

Luego, sólo en los puntos del espacio de estados  $(i, v)$  en que se cumpla (10.42) podrá existir el MD, es decir, sólo donde  $v > E$ , lo cual es consistente con lo que sabemos del convertidor Boost que es un convertidor elevador de tensión.

Para calcular la dinámica con que evolucionan los estados en MD, reemplazamos el control equivalente en las ecuaciones de lazo abierto

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L} + \frac{1}{L}v \left(1 - \frac{E}{v}\right) \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i \left(1 - \frac{E}{v}\right). \end{aligned} \quad (10.43)$$

También, teniendo en cuenta que mientras el sistema opera en MD,  $i = I_r$ , resulta

$$\begin{aligned} \dot{i} &= 0 \\ \dot{v} &= -\frac{1}{RC}v - \frac{EI_r}{C} \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Mientras la primera ecuación nos dice que durante el MD, la corriente es constante ( $i = I_r$ ), la segunda define la dinámica no lineal con que evoluciona la tensión. Para verificar si está dinámica es estable podemos graficar

$$\dot{v} = f(v) = \underbrace{-\frac{1}{RC}v}_{f_1(v)} - \underbrace{\frac{EI_r}{C} \frac{1}{v}}_{f_2(v)}. \quad (10.45)$$

En la figura 10.10 se han graficado los dos términos de (10.45) (la recta  $f_1(v)$  y la hipérbola  $f_2(v)$ ) y su suma  $\dot{v} = f(v)$ . El punto donde  $\dot{v} = f(v) = 0$  intersepta el eje horizontal define el punto de equilibrio. Su estabilidad puede ser analizada considerando perturbaciones que nos aparten de la condición de equilibrio. Por ejemplo, si una perturbación llevara a los estados al punto A (de mayor tensión que la de equilibrio), el valor negativo de  $\dot{v}$  haría que la tensión disminuyera y que el punto de operación tendiera nuevamente al punto de equilibrio. De igual manera, una perturbación que hiciera disminuir la tensión  $v$  (punto B, por ejemplo) daría lugar a una derivada de la tensión positiva que haría crecer la tensión. Luego, puede decirse que el punto de equilibrio es estable.

La estabilidad también podría haberse calculado a partir de linealizar (10.45) en el entorno del punto de equilibrio

$$\frac{d\Delta v}{dt} = -\frac{1}{RC}\Delta v - \left. \frac{I_r E}{Rv^2} \right|_{v^2=RIE} \Delta v \quad (10.46)$$

$$\frac{d\Delta v}{dt} = -\frac{2}{RC}\Delta v, \quad (10.47)$$

donde vemos que el único autovalor es negativo y por consiguiente la tensión muestra un comportamiento estable.

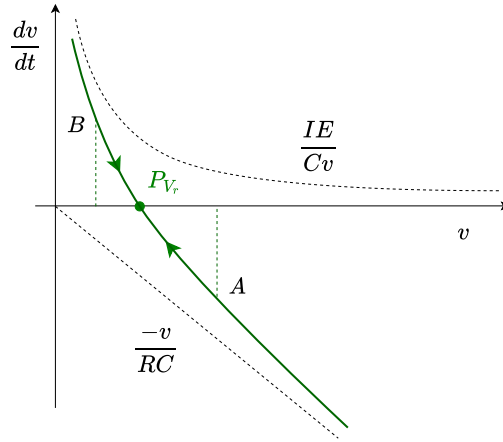


Figure 10.10: Determinación gráfica de la estabilidad del voltaje  $v$

Luego, eligiendo adecuadamente la referencia de corriente, puede controlarse  $v$  en forma indirecta. Al igual que la fuente Buck, estudiada previamente, para rechazar las perturbaciones inducidas por los cambios de carga debería expandirse el sistema con un estado integral.

Todo parece funcionar correctamente, como última prueba verifiquemos que los puntos de equilibrio estén en la región del espacio de estados en la cual se produce el MD. Para calcular los puntos de equilibrio, igualamos a cero las ecuaciones de lazo cerrado (10.43)

$$\begin{aligned} \dot{i} &= 0 \\ \dot{v} &= -\frac{1}{RC}v - \frac{EI_r}{C} \frac{1}{v} = 0, \end{aligned} \tag{10.48}$$

pudiendo concluir que para cada referencia de corriente  $I_r$ , la tensión de equilibrio es

$$v^2 = V_r^2 = I_r RE. \tag{10.49}$$

Esta expresión corresponde a la parábola orientada a lo largo del eje  $i$ , que se grafica en la figura 10.11. Vemos que para que los puntos de equilibrio caigan en la región donde el sistema puede operar en MD, la corriente de referencia debería ser mayor que  $E/R$  (o, lo que es equivalente, que  $v > E$ ). En la misma figura se grafican trayectorias para distintas  $I_r$ , las mismas alcanzan las superficies correspondientes y evolucionan a corriente constante hacia los puntos de equilibrio. En el caso de la referencia  $I_{r_1}$ , la trayectoria entra en MD pero sale de él cuando en busca del punto de equilibrio pasa los límites

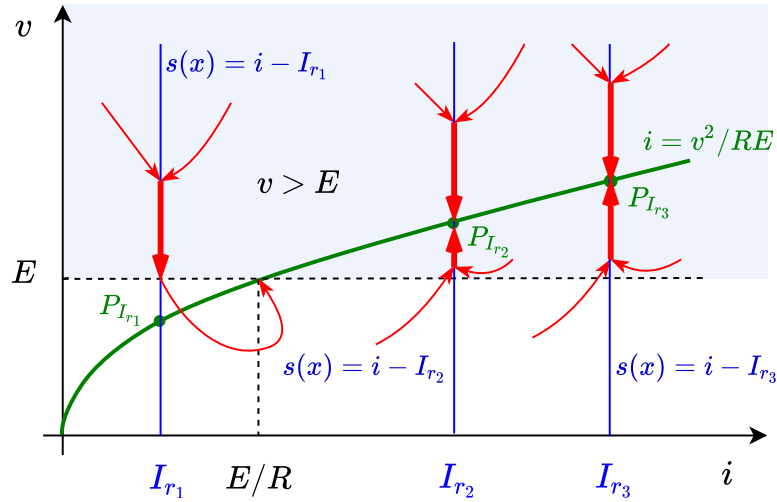


Figure 10.11: Trayectorias para distintas referencias de corriente

de la zona permitida para el MD.

### 10.1.3 Caso C. Control de energía interna del convertidor Boost

Recordemos el primer modelo que obtuvimos del convertidor Boost (ec. (10.4)),

$$\begin{aligned} \dot{i} &= -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L} + \frac{1}{L}v u \\ \dot{v} &= \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i u . \end{aligned} \quad (10.50)$$

A partir de él, nos interesa calcular el modelo normal que tenga como salida a la energía almacenada en el convertidor, es decir la energía almacenada en los elementos  $L$  y  $C$

$$y = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2) . \quad (10.51)$$

Luego, el primer estado es  $z_1 = y$ , mientras que el segundo estado dependerá del grado relativo de  $y$ . Para calcular el grado relativo, derivamos la salida

$$\dot{z}_1 = \dot{y} = L_{f+gu}y = \nabla y \cdot (f + gu) \quad (10.52)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}_1 = \begin{bmatrix} Li & Cv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}v + \frac{E}{L} + \frac{1}{L}v u \\ \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i u \end{bmatrix} = iE - \frac{v^2}{R} . \quad (10.53)$$

Como la derivada de la salida no depende explícitamente del control  $u$ , el grado relativo es mayor que 1. Fácilmente puede verificarse que la derivada segunda de la salida sí depende explícitamente de  $u$ , luego el grado relativo es 2 (de hecho no podía ser de otra forma ya que el sistema es de segundo orden), y por consiguiente las variables de estado para el modelo normal son

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1 = y \\ z_2 = \dot{z}_1 = \dot{y} \end{bmatrix} \quad (10.54)$$

y el modelo resulta

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_{f+gu}z_2 = q(z) + p(z)u. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Si proponemos una superficie de control lineal

$$s(z) = E_r - z_1 - k_2 z_2 = 0 \quad (10.56)$$

donde,  $E_r$  es la referencia para la señal de salida y  $k_1$  se ha elegido igual a 1. En MD,  $s(z) = 0$  y por consiguiente

$$z_2 = \frac{1}{k_2}(E_r - z_1) \quad (10.57)$$

reemplazando en las ecuaciones de lazo abierto (10.55), obtenemos las ecuaciones de estado del convertidor a lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 = \frac{1}{k_2}(E_r - z_1) \\ \dot{z}_2 &= \text{ecuación redundante por pérdida de un estado por MD} \end{aligned} \quad (10.58)$$

Note que:

- el sistema presenta una dinámica lineal de primer orden (autovalor en  $-1/k_2$ ) en términos de las variables de estado  $z$
- no hay dinámica escondida a verificar ya que la variable de salida es de grado relativo  $r = n = 2$
- para el cálculo de la dinámica de lazo cerrado, hemos obviado el cálculo del control equivalente, pero este cálculo es indispensable para determinar el rango de operación en MD
- en términos de los estados originales  $(i, v)$ , la superficie de control es

$$s(i, v) = E_r - y = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2) - k_2\left(iE - \frac{v^2}{R}\right) = 0. \quad (10.59)$$

## 10.2 Control de un sistema fotovoltaico

La figura 10.12 esquematiza un sistema de conversión fotovoltaico. Consta básicamente de: un panel fotovoltaico, un convertidor y la carga a alimentar. Evaluaremos el control del sistema para cumplir distintos objetivos. Previamente recordemos algunos conceptos básicos y curvas características de los paneles fotovoltaicos.

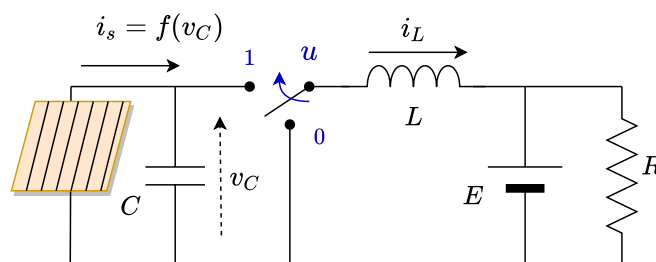


Figure 10.12: Sistema de conversión fotovoltaica

En la figura 10.13 se muestra el circuito equivalente de una celda fotovoltaica. Consta de un diodo, un generador de corriente dependiente de la radiación solar incidente  $\lambda$  y una resistencia representando pérdidas internas y de conexión. El efecto del generador es desplazar la característica del diodo como se indica en la parte *a*) de la figura 10.14. El cuarto cuadrante de esta figura es la región de operación de la celda fotovoltaica, región normalmente representada como en la parte *b*) de la figura que se conoce como característica de la celda fotovoltaica.

Luego, las curvas características de una celda responden a

$$i_s(\lambda, T) = I_{PH}(\lambda) - I_0\left(e^{q\left(\frac{v+IR_s}{kT}\right)} - 1\right), \quad (10.60)$$

donde  $q$  es la carga del electrón,  $K$  la constante de Boltzmann,  $v$  la tensión en bornes de la celda,  $I_0$  la corriente inversa de saturación en oscuridad y  $T$  la temperatura absoluta en grados Kelvin.

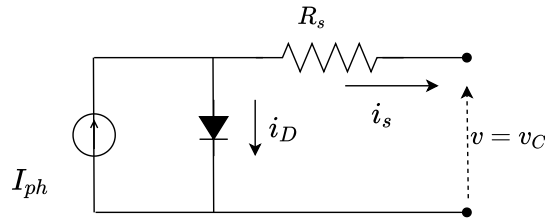


Figure 10.13: Circuito equivalente de una celda fotovoltaica

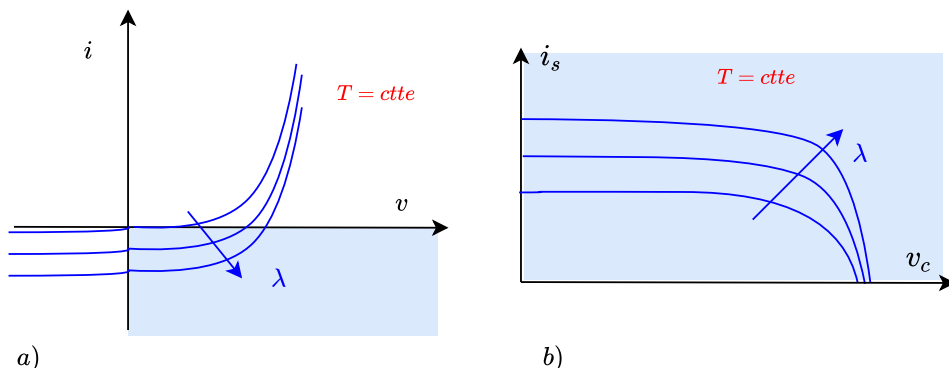


Figure 10.14: Curvas características de un diodo y de una celda fotovoltaica

La conexión de celdas en serie y paralelo da lugar a un panel fotovoltaico. Luego, las curvas características de un panel resultan de "sumar" a corriente constante (conexión serie) o tensión constante (conexión paralelo) las curvas características de las celdas individuales. La figura 10.15 muestra curvas características de paneles fotovoltaicos donde se distingue claramente la dependencia de las mismas con la radiación solar y con la temperatura. En particular se observa que la potencia que puede entregar el panel depende de su polarización (tensión  $v_C$ ) y que presenta un máximo cuya ubicación es muy sensible a estas variables.

Como hemos procedido en otros problemas, para obtener el modelo de estados del sistema, primero planteamos los modelos para cada posición de la llave ( $u = 0$  y  $u = 1$ ).

*Modelo para la llave en la posición  $u = 0$*

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= -\frac{E}{L} \\ \dot{v}_C &= \frac{1}{C}i_s(v_C) \end{aligned} \tag{10.61}$$

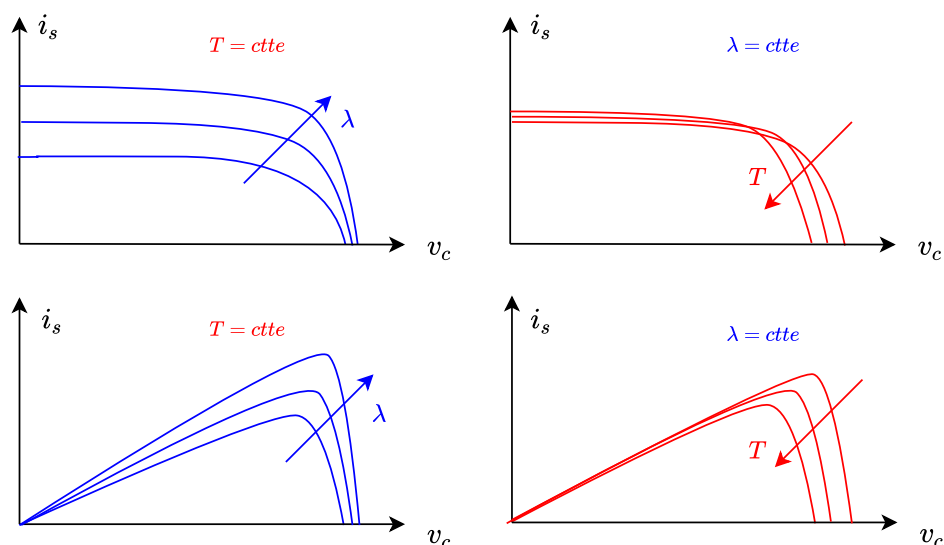


Figure 10.15: Dependencia de las curvas características de una celda fotovoltaica con la radiación y la temperatura

Moledo para la llave en la posición  $u = 1$

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= \frac{1}{L}v_C - \frac{E}{L} \\ \dot{v}_C &= \frac{1}{C}i_s(v_C) - \frac{1}{C}i_L. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Y a partir de (10.61) y (10.62) obtenemos un modelo válido para ambas posiciones de la llave

$$\begin{aligned} \dot{i}_L &= -\frac{E}{L} + \frac{1}{L}v_C u \\ \dot{v}_C &= \frac{1}{C}i_s(v_C) - \frac{1}{C}i_L u \end{aligned} \quad (10.63)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{E}{L} \\ \frac{1}{C}i_s(v_C) \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L}v_C \\ -\frac{1}{C}i_L \end{bmatrix}}_{g(x)} u. \quad (10.64)$$

### 10.2.1 Control de corriente $i_L$

Evaluemos el control de la corriente  $i_L$  que en estado estacionario coincide con la de carga por la resistencia  $R$ . Note que, al estar la tensión de salida fijada por la batería, el control de esta corriente equivale también al control de potencia de salida del convertidor.



En la ecuación (10.63) vemos que la variable controlada ( $i_L$ ) es de grado relativo  $r = 1$ , por consiguiente el modelo hallado es un modelo normal.

Verificamos las condiciones de existencia para el MD, suponiendo la superficie de control

$$s(x) = I_r - i_L = 0 \quad (10.65)$$

- Condición necesaria de transversalidad  $L_g s(z) < 0$

$$L_g s(x) = \nabla s \cdot g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_c}{L} \\ -\frac{i_L}{C} \end{bmatrix} = -\frac{v_c}{L} < 0 \quad (10.66)$$

- Verificada la condición de transversalidad, la condición necesaria y suficiente  $u^- = 0 < u_{eq} < u^+ = 1$  nos permite determinar cuál es el dominio (o región de trabajo) del MD. En este caso, el control  $u_{eq}$  resulta

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} = -\frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E/L \\ i_s(v_C) \end{bmatrix}}{-v_C/L} = \frac{E}{v_C} \quad (10.67)$$

y, debiendo cumplirse

$$0 < u_{eq} = \frac{E}{v_C} < 1, \quad (10.68)$$

la región de operación en MD queda restringida a la zona del espacio de estados en que

$$v_C > E. \quad (10.69)$$

Para determinar con que dinámica se mueven los estados una vez que el sistema opera en MD, reemplazamos el control equivalente en las ecuaciones de lazo abierto. Luego, a lazo cerrado, el sistema responde a

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{L} \\ \frac{1}{C} i_s(v_C) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} v_C \\ -\frac{1}{C} i_L \end{bmatrix} \frac{E}{v_C} \quad (10.70)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{i}_L &= 0 \\ \dot{v}_C &= \frac{1}{C}i_s(v_C) - \frac{1}{C}\frac{E}{v_c}i_L \end{aligned} \quad (10.71)$$

Analicemos estas dos ecuaciones diferenciales

- la primera,  $\dot{i}_L = 0$ , nos dice que la corriente es constante. De hecho, el sistema está operando en MD y por consiguiente  $i_L = I_r$ . Pero esta ecuación también está poniendo en evidencia la reducción de estados (de dinámica) que introducen los regímenes deslizantes

- la segunda ecuación diferencial, expresa la dinámica escondida de la tensión  $v_C$  mientras la corriente permanece constante gracias al MD, siendo necesario verificar su estabilidad

- para verificar esta propiedad, primero calcularemos el punto de equilibrio ( $V_C$ ) de la tensión sobre el capacitor anulando su derivada y teniendo en cuenta que, por estar en MD,  $i_L = I_r$

$$\dot{v}_C = 0 = \frac{1}{C}i_s(V_C) - \frac{E}{C V_C}I_r \quad (10.72)$$

Luego

$$i_s(V_C) V_C = I_r E. \quad (10.73)$$

La ecuación (10.73) ratifica algo obvio: en estado estacionario la potencia generada por el panel  $i_s(V_C)V_C$  es igual a la potencia de salida del convertidor  $I_r E$ . A los efectos de visualizar la existencia de puntos de equilibrio podemos graficar ambos miembros de la ecuación (10.73). Los puntos donde se intersectan ambas curvas de potencia corresponden a puntos de equilibrio (ver figura 10.16). Si la corriente de referencia es menor que  $P_{max}/E$  hay dos puntos de equilibrio (tensiones  $V_{C1}$  y  $V_{C2}$ ), pero si  $I_r = P_{max}/E$  sólo un punto de equilibrio y ninguno si  $I_r > P_{max}/E$ . En la parte inferior de la figura 10.16 se ha graficado la corriente del panel en función de la tensión en el capacitor pudiéndose identificar los valores de estado estacionario.

Verifiquemos ahora la estabilidad de la variable  $v_C$  en el entorno de los puntos de equilibrio. Lo podemos hacer graficando  $\dot{v}_C$  en función de  $v_C$  de acuerdo a la ecuación (10.71). En la parte superior de la figura 10.17 se grafican los dos términos del segundo miembro de (10.71), y en la inferior  $\dot{v}_C$  como resta de las curvas de la parte superior.

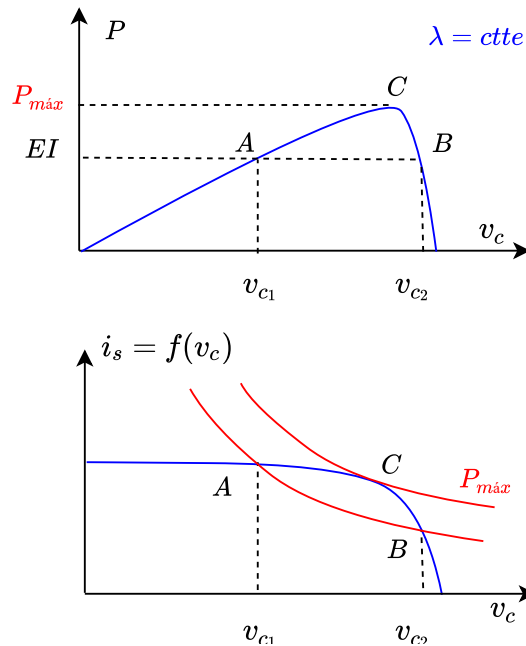


Figure 10.16: Valores de equilibrio sobre las características del panel fotovoltaico

Los dos puntos de la figura en que  $\dot{v}_C = 0$  son los puntos de equilibrio. Dado que la pendiente de la curva en el punto  $(V_{C1}, 0)$  es positiva, la dinámica en su entorno es inestable. Por el contrario, la pendiente en el punto  $(V_{C1}, 0)$  es negativa, indicando que en su entorno  $v_C$  es estable.

Resumimos los resultados de esta sección en la figura 10.18. En ella, que corresponde al plano de estados, observamos

- en color azul, el lugar geométrico de los puntos de equilibrio para distintas  $I_r$ . Efectivamente, de la ecuación (10.73), surge que los puntos de equilibrio tienen que verificar  $I_r = i_s(V_C)V_C/E$ , es decir tienen que estar sobre la curva de potencia del panel  $i_s(v_C)v_C$  afectada de una constante  $1/E$
- la zona de operación en modo deslizante es mostrada con un sombreado celeste. Sus límites quedan determinados por la condición (10.69), por  $i_L > i_s$  y  $v_C > E$ , ya que las potencias de entrada y salida son iguales
- la superficie de control  $s(x) = I_r - i_L = 0$ , son rectas horizontales con ordenadas  $I_r$ , resultando dos, uno o ningún punto de equilibrio
- se muestra distintas trayectorias, que al entrar en la superficie, operan en MD. Si estas trayectorias alcanzan la superficie a la derecha del

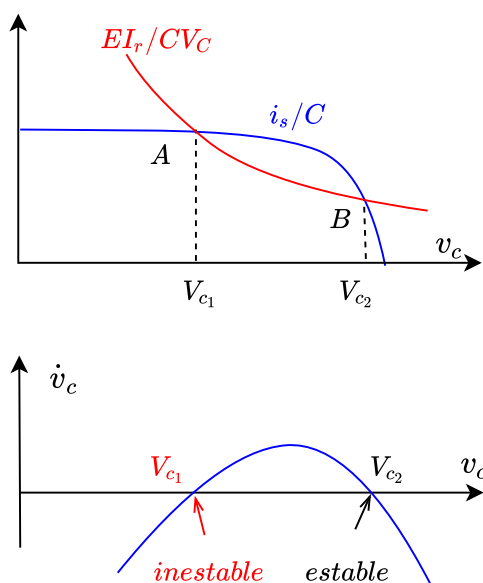


Figure 10.17: Estabilidad de los puntos de equilibrio

punto  $A$ , evolucionan en MD hasta alcanzar el punto de equilibrio  $B$ . Vemos también que las trayectorias en el entorno de  $A$  se alejan de dicho punto debido a la inestabilidad comentada. En el caso de las trayectorias que alcanzan la superficie a la izquierda del punto  $A$ , evolucionan en MD sólo mientras se mantengan en la región de operación sombreada.

### 10.2.2 Control de tensión $v_C$

Muchos de los sistemas de control de los sistemas fotovoltaicos trabajan buscando permanentemente el punto de máxima potencia que, como comentamos previamente, depende fuertemente de la radiación solar  $\lambda$  y de la temperatura de las juntas del panel. Los algoritmos de búsqueda o seguimiento del máximo de potencia se conocen por la sigla en inglés MPPT (Maximum Power Point Tracker) y en su mayoría consisten en un lazo de control interno de la tensión  $v_C$ , cuya referencia cambia de acuerdo a las condiciones de operación. Evaluemos, el control de esta tensión empleando conceptos de control por MD.

La obtención de un modelo normal es inmediata. Teniendo en cuenta que ahora la variable de salida es  $v_C$ , que es de grado relativo  $r = 1$ , un modelo práctico es simplemente el que se obtiene cambiando el orden de las ecuaciones diferenciales en (10.63)

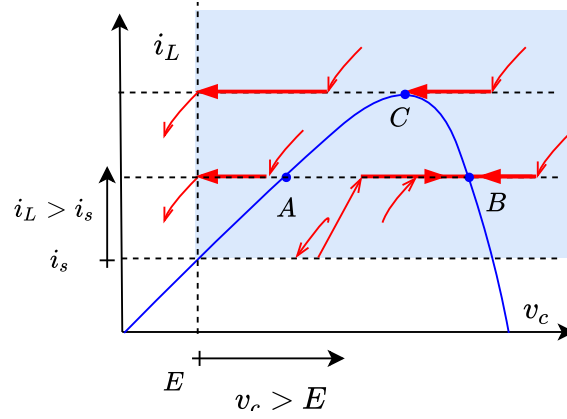


Figure 10.18: Comportamiento del sistema de conversión de energía fotovoltaica con control de corriente en el espacio de estados

$$\begin{aligned} \dot{v}_C &= \frac{1}{C}i_s(v_C) - \frac{1}{C}i_L u \\ \dot{i}_L &= -\frac{E}{L} + \frac{1}{L}v_C u \end{aligned} \quad (10.74)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C}i_s(v_C) \\ -\frac{E}{L} \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C}i_L \\ \frac{1}{L}v_C \end{bmatrix}}_{g(x)} u. \quad (10.75)$$

Teniendo en cuenta el objetivo que nos hemos planteado, controlar la tensión  $v_C$ , elegimos la superficie

$$s(x) = V_r - v_C = 0. \quad (10.76)$$

Como en ejemplos anteriores, lo primero que hacemos es verificar las condiciones que nos dicen si el sistema puede operar en MD

- Condición necesaria de transversalidad  $L_g s(x) < 0$

$$L_g s(x) = \nabla s \cdot g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i_L}{C} \\ \frac{v_C}{L} \end{bmatrix} = \frac{i_L}{C} \neq 0 \quad (10.77)$$

**No se cumple!!** Pero lo arreglamos fácil, sólo cambiamos la superficie, manteniendo siempre el mismo objetivo

$$s(x) = v_C - V_r = 0 \quad (10.78)$$

y volvemos a verificar la condición de transversalidad

$$L_g s(x) = \nabla s \cdot g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i_L}{C} \\ \frac{v_C}{L} \end{bmatrix} = -\frac{i_L}{C} < 0 \quad (10.79)$$



**Ahora si se cumple!!** Pasamos a verificar la segunda condición.

- Condición necesaria y suficiente  $u^- = 0 < u_{eq} < u^+ = 1$ . En este caso, el control  $u_{eq}$  resulta

$$u_{eq} = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} = -\frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} i_s(v_C) \\ -\frac{E}{L} \end{bmatrix}}{-\frac{i_L}{C}} = \frac{i_s(v_C)}{i_L}. \quad (10.80)$$

y debiendo cumplirse

$$0 < u_{eq} = \frac{i_s(v_C)}{i_L} < 1, \quad (10.81)$$

la región de operación en MD queda restringida a la zona del espacio de estados en que

$$i_L > i_s(v_C). \quad (10.82)$$

La dinámica de la corriente  $i_L$ , mientras  $s(x) = v_C - V_r = 0$  resulta de reemplazar  $u$  por  $u_{eq}$  en (10.74)

$$\begin{aligned} \dot{v}_C &= \frac{1}{C} i_s(v_C) - \frac{1}{C} i_L \frac{i_s(v_C)}{i_L} = 0 \\ \dot{i}_L &= -\frac{E}{L} + \frac{1}{L} V_r \frac{i_s(v_C)}{i_L}. \end{aligned} \quad (10.83)$$

A simple vista es difícil vaticinar acerca de la estabilidad de la ecuación diferencial no lineal de la corriente  $i_L$ . Para determinar la estabilidad, calculemos primero los posibles puntos de equilibrio igualando a cero la derivada  $\dot{i}_L$

$$\dot{i}_L = -\frac{E}{L} + \frac{1}{L} V_r \frac{i_s(v_C)}{I_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_r i_s(v_C) = EI_r. \quad (10.84)$$

Nuevamente el punto de equilibrio  $I$  de la corriente  $i_L$  sale del balance de potencia. La figura 10.19 muestra en el espacio de estados, el lugar geométrico de los puntos de equilibrio para distintas  $V_r$ , la superficie de control y el único punto de equilibrio (intersección de las dos curvas previas). También se resalta la región del espacio de estados en que es posible el MD (ecuación (10.82)).

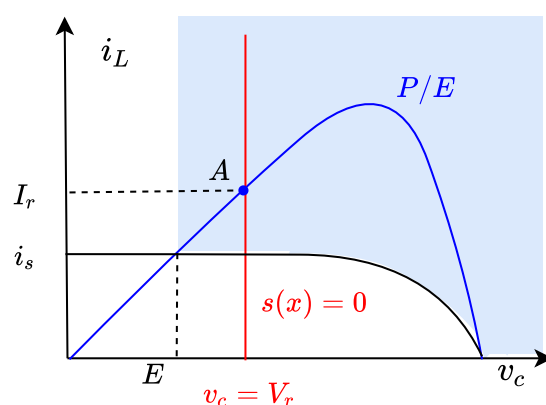


Figure 10.19: Superficie de control, punto de equilibrio y región de MD en el control del sistema fotovoltaico por tensión

De la figura se desprende que, independientemente de la tensión de referencia  $V_r$ , siempre habrá un sólo punto de equilibrio. Para ver si es estable, graficamos  $\dot{i}_L = f(i_L)$  en la figura 10.20. En líneas punteadas se grafican por separado los dos términos de la expresión (10.83) y en línea continua su suma. Al ser la pendiente de  $\dot{i}_L = f(i_L)$  negativa, el único punto de equilibrio es estable. Efectivamente, si una perturbación desplaza la corriente del punto de equilibrio a la derecha o izquierda, la derivada de la corriente será negativa o positiva (respectivamente) haciendo que la corriente retorne al punto de equilibrio.

Luego, del análisis previo se desprende el comportamiento que se muestra en la figura 10.21, donde se muestran las trayectorias para una referencia  $V_r$ .

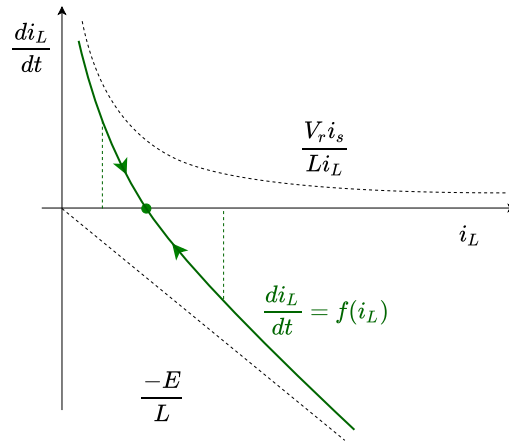


Figure 10.20: Estabilidad del punto de equilibrio en el control de tensión del sistema fotovoltaico

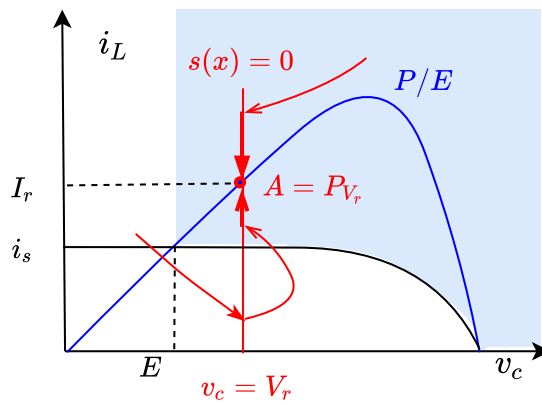


Figure 10.21: Trayectorias en el espacio de estados del sistema fotovoltaico con control de tensión



11

## CONTINÚA

Este texto se mantiene abierto con la idea de ir mejorando su contenido e incorporando de a poco material relevante desde el punto de vista conceptual y de aplicaciones. Aún así se ha considerado bueno ir compartiendo estas notas. Ojalá puedan serle útiles. La idea es actualizarlas permanentemente. Gracias.